Міхась Булавацкі

Цалкам зразумелая трыганаметрыя

Магілёў 2007

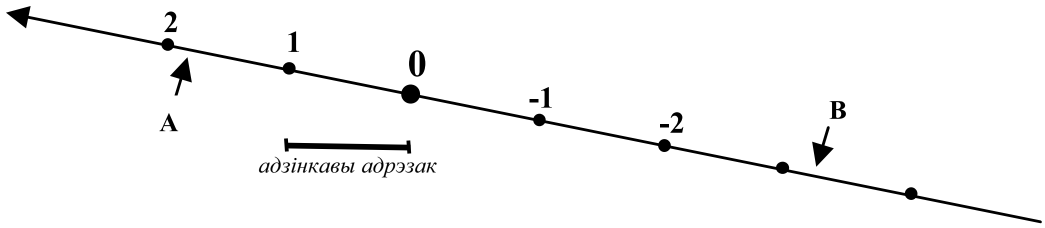
<u>Прысвячаю Машы Каральковай</u>
<u>і Янку Лапіцкаму</u>

Булавацкі Міхась. Цалкам зразумелая трыганаметрыя. Навучальны дапаможнік для старшакласнікаў.

Дапаможнік (арыентаваны на праграму сярэдняй школы) прапануе навучэнцам шматразовы агляд інфармацыйнай прасторы курса трыганаметрыі: у форме тлумачальных тэкстаў з малюнкамі для ўспрыняцця і асэнсавання, у форме пытанняў з адказамі для больш надзейнага ўсведамлення, у форме трох кампактаў апорных сігналаў для шырокаахопнага разумення і запамінання, у форме разнастайных практыкаванняў з парадамі па іх выкананні для трэнажу ў выкарыстанні атрыманых ведаў.

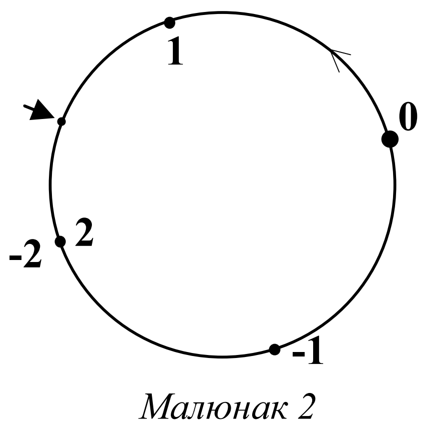
І-1. Лікавая акружына (градусы)

Вы ведаеце, як са звычайнай прамой зрабіць лікавую прамую? Трэба на прамой адзначыць любы пункт, назваўшы яго нулявым (пачатковым) пунктам, затым адзін з атрыманых праменяў (любы) назваць дадатным, пазначыўшы гэта стрэлачкай, і нарэшце абраць нейкі адрэзак у якасці адзінкавага адрэзка, з дапамогай якога на прамой наносіцца шкала ў адзін і другі бок, пачынаючы ад нулявога пункта (мал.1). Пасля чаго любы пункт прамой атрымлівае ў адпаведнасць нейкі лік, называны каардынатай гэтага пункта на прамой. Напрыклад, каардыната пункта A прыблізна роўная 1,8, а каардыната пункта B прыблізна роўная -3,3. Такую прамую і называюць лікавай (або каардынатнай) прамой.



Малюнак 1

Гэткім жа чынам можна са звычайнай акружыны зрабіць лікавую акружыну: адзначым на акружыне любы пункт, які будзем лічыць пачатковым (нулявым) пунктам акружыны, пазначым стрэлкай дадатны кірунак руху ад нулявога пункта (па ходу гадзіннікавай стрэлкі ці супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі) і абярэм адзінкавую дугу, з дапамогай якой нанясем на акружыне шкалу ў адзін і другі бок ад нулявога пункта. Такую акружыну і будзем называць лікавай або каардынатнай акружынай.

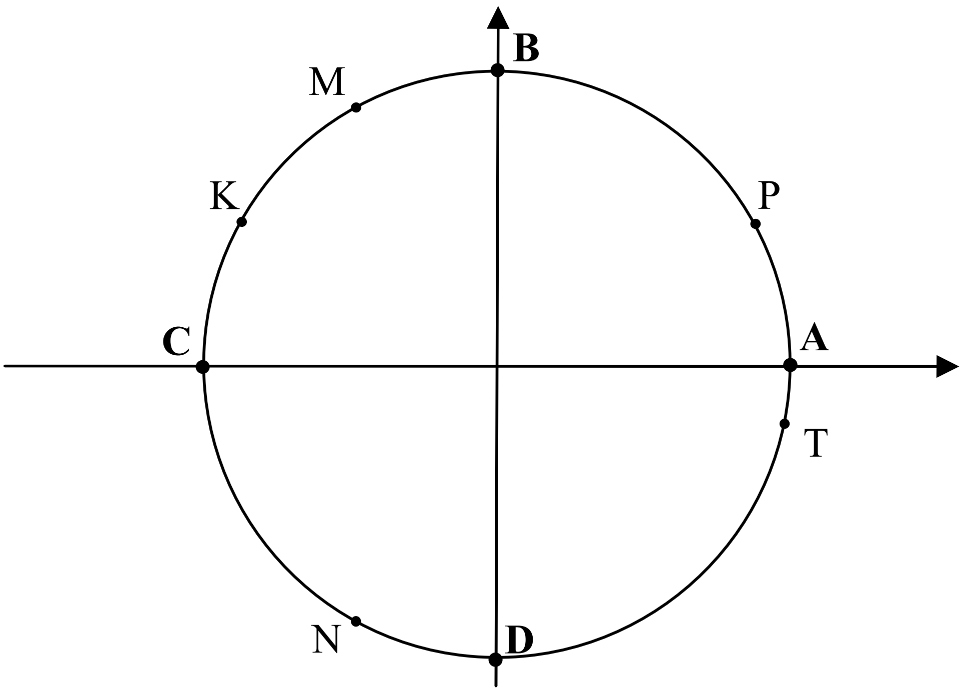


Малюнак 2

На малюнку 2 дадатным кірункам абраны кірунак супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі, а адзінкавай дугой выбрана дуга ў чвэртку акружыны.

У лікавай акружыны ёсць істотнае адрозненне ад лікавай прамой: кожнаму пункту акружыны цяпер адпавядае не адзін, а бясконцае мноства лікаў. Кожны пункт акружыны мае бясконцае мноства сваіх каардынат. Да прыкладу, пункт, пазначаны стрэлачкай на малюнку 2, мае такія каардынаты: 1,5; 5,5; 9.5; 13,5... Ці, калі рухацца ад нуля ў другі бок: -2,5; -6,5; -10,5... Няцяжка здагадацца, што каардынаты гэтага (ды й любога іншага) пункта адрозніваюцца на лік, роўны цэлай колькасці даўжынь акружыны. Пры нашым выбары адзінкавай дугі (чвэртка акружыны) даўжыня ўсёй акружыны роўна 4 такія адзінкі, таму каардынаты аднаго яе пункта адрозніваюцца на 4, або на 8, або на 12 і г.д.

А цяпер у плоскай дэкартавай сістэме каардынат (дзве ўзаемна перпендыкулярныя восі, якія першым пачаў разглядаць французскі матэматык і філосаф Рэнэ Дэкарт) пабудуем акружыну **адзінкавага радыуса** з цэнтрам у пачатку каардынат (паколькі на ёй будзе шмат пабудаванняў, то адзінкавым адрэзкам выберам адрэзак дастаткова вялікі, – мал.3). І зробім гэтую акружыну лікавай. Пачатковым (нулявым) пунктам на ёй няхай будзе пункт перасячэння акружыны з дадатным праменем восі абсцыс, дадатным кірункам няхай будзе кірунак супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі. А адзінкавай дугой няхай будзе малесенькая дуга ў адзін градус (1/360 частка акружыны).



Малюнак 3

Пры такім выбары пункт A акружыны мае на плоскасці каардынаты (1; 0), а на акружыне каардынату 0°, або 360°, або 720°,.. або -360°, або -720°, або -1080°... Увогуле ўсе каардынаты гэтага пункта на акружыне можна запісаць формулай $360^{\circ}k$, дзе k – любы цэлы лік (як дадатны, так і адмоўны або нуль). Пункт B мае на плоскасці каардынаты (0; 1), а на акружыне – каардынаты 90°, або 450°, або -270°..., якія можна запісаць формулай $90^{\circ}+360^{\circ}b$, дзе b – любы цэлы лік, бо толькі прайшоўшы ад гэтага пункта цэлую акружыну (360°) ці некалькі цэлых акружын, можна патрапіць у той жа пункт.

Пункт C мае на плоскасці каардынаты (–1; 0), а на акружыне – каардынаты $180^{\circ}+360^{\circ}c$, дзе c – любы цэлы лік. Пункт D мае на плоскасці каардынаты (0; –1), а на акружыне – каардынаты $270^{\circ}+360^{\circ}m$, дзе m – любы цэлы лік. Часцей каардынаты пункта D на акружыне будзем запісваць так: $-90^{\circ}+360^{\circ}n$, дзе n – любы цэлы лік. Гэта відавочна адно і тое ж, калі лік n браць на адзінку большы за m. Увогуле першым складнікам у формуле каардынат пункта D (і любога іншага) можна было б узяць любую з яго каардынат (270°, 630°, -810°...), але зручней выбіраць лік, бліжэйшы да нуля.

Як знайсці на такой акружыне пункт M з каардынатай, напрыклад, 23888°?

Падзелім спачатку 23888 на 360, каб вызначыць, колькі поўных акружын трэба прайсці да названага пункта. 23793:360 = 66,35555... Такім чынам, ад нулявога пункта акружыны да названага пункта трэба прайсці 66 поўных акружын і частку 67-й. Каб дакладней уявіць сабе гэтую частку, трэба дробную частку атрыманага ліку (0,35555...) памножыць на 360°. Атрымаем 128°. Такім чынам, пункт M(23888°) будзе там жа, дзе пункт з каардынатай 128° (гл. мал. 3). Пункт N(-23888°) будзе, як няцяжка здагадацца, сіметрычным пункту M адносна восі абсцыс.

Усвядомім яшчэ раз працэдуру знаходжання пункта на акружыне па яго каардынаце: дадзены лік трэба падзяліць на 360, адняць цэлую частку атрыманай дзелі, а дробную частку памножыць на 360. Па атрыманай у выніку каардынаце і паказаць патрэбны пункт.

T(507228°)? → 507228:360 = 1408,966666... (адкідаем цэлую частку) → 0,966666... (множым на 360) → 348. Засталося паказаць пункт T з каардынатай 348° (мал.3).

На малюнку 3 паказаны яшчэ два пункты: K і P. Адзін з іх мае каардынату 5092950°, другі – каардынату 17430°. Паспрабуйце разабрацца, дзе які, – гэта дапаможа вам яшчэ лепш усвядоміць працэдуру пошуку пункта на акружыне. І пасля гэтага адкажыце сабе: ці праўда, што вы можаце знайсці пункт на акружыне па **любой** яго каардынаце? Калі вы сумняваецеся, што гэта так, то вам трэба яшчэ патрэніравацца: вазьміце наўздагад нейкі чатырох-, пяці-, шасцізначны лік градусаў і знайдзіце адпаведны пункт на акружыне. Потым няхай гэта праверыць той, хто робіць такое ўпэўнена. Калі ж вы адказваеце на пастаўленае пытанне станоўча, то можна рухацца далей.

І-2. Лікавая акружына (радыяны)

Яшчэ раз: у дэкартавай сістэме каардынат пабудуем акружыну адзінкавага радыуса з цэнтрам у пачатку каардынат. І зробім гэтую акружыну лікавай. Пачатковы (нулявы) пункт пакінем там жа – на перасячэнні акружыны з дадатным праменем восі абсцыс. Дадатны кірунак па акружыне зноў жа супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі (няхай ужо гадзіннікавая стрэлка не крыўдзіцца).

Адзінкавай дугой цяпер выберам **дугу, па даўжыні роўную радыусу**. Назавем такую дугу **радыян**ам. **Радыян**ам называюць і адпаведны такой дузе цэнтральны вугал.

Паколькі даўжыня акружыны вызначаецца па формуле l = 2πR, а R = 1 (бо мы будавалі акружыну адзінкавага радыуса), то радыянная мера ўсёй акружыны 2π. А ў градусах: 360^o.

Атрымалі такую роўнасць: 2π радыянаў = 360^o. Падзелім абедзве часткі на 2:

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} \textbf{ радыянаў} = \mathbf{180^o}}$$

Праз гэтую роўнасць радыяны звязваюцца з градусамі. З яе атрымаем:

$$\boxed{\textbf{1 радыян} = \frac{180^o}{\pi} \approx \mathbf{57^o18'}} \qquad \boxed{\mathbf{1^o} = \frac{\pi}{180}\ \textbf{радыянаў}}$$

Папрацуем з апошняй роўнасцю для найчасцей ужывальных велічынь:

$\mathbf{30^o} = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$; $\mathbf{45^o} = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$; $\mathbf{60^o} = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$; $\mathbf{90^o} = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$; $15^o = \frac{15\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ ...

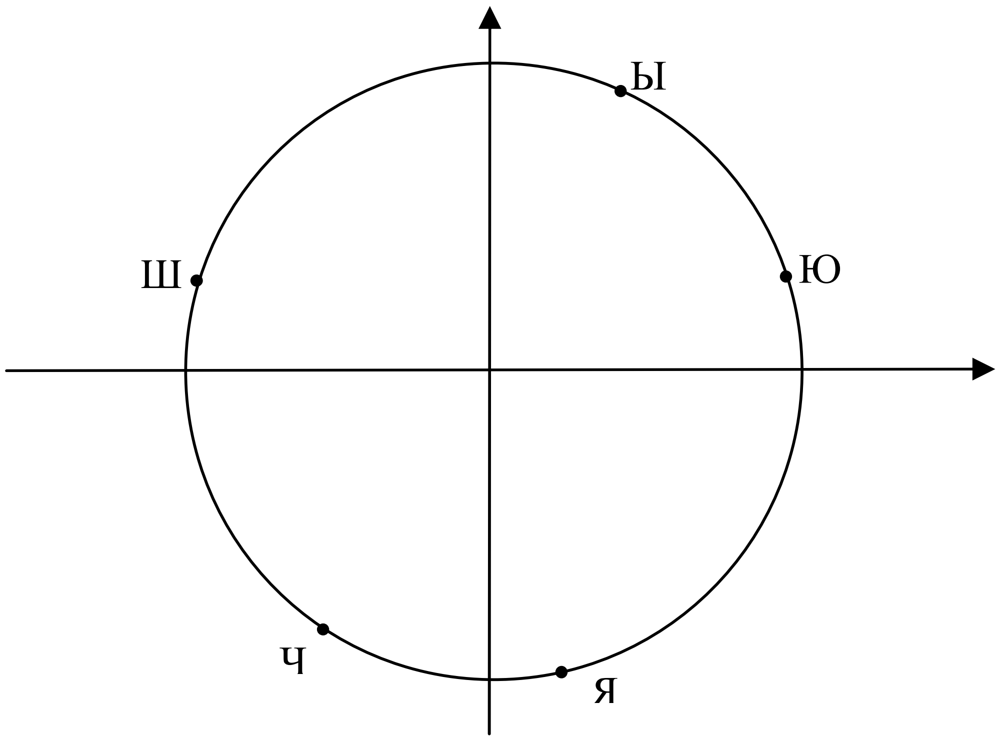
(*Слова "радыян" у гэтых роўнасцях не напісана і далей мы яго пісаць не будзем, бо ёсць дамоўленасць паміж матэматыкамі аб тым, што пад ненапісанымі адзінкамі вымярэння вуглоў ці дуг падразумоўваюцца радыяны. Гэта скарачае запісы. Але цяпер, калі вы ўбачыце запіс "$\angle A = 17$" ці "$\cup MN = 3{,}4$", то будзеце разумець іх так: "вугал A мае велічыню 17 радыян" ці " дуга MN мае велічыню 3,4 радыяны". Знак жа градуса трэба пісаць абавязкова, інакш вугал будзе прачытвацца ў радыянах і атрымаецца памылка.*)

А цяпер прабяжымся па вузлавых пунктах акружыны (мал.3). Пункт A мае на плоскасці каардынаты (1; 0), а на акружыне – каардынату 0, або 2π, або 4π..., або -2π, -4π... Увогуле ўсе каардынаты гэтага пункта на акружыне можна запісаць формулай $2\pi n$, дзе n – любы цэлы лік. Пункт B мае на плоскасці каардынаты (0; 1), а на акружыне – каардынату $\frac{\pi}{2}$ (бо дуга AB – чвэртка акружыны даўжынёй 2π), або $\frac{5\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2}+2\pi$), або $-\frac{3\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2}-2\pi$)... Усе каардынаты пункта B на акружыне можна запісаць формулай $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, дзе n – любы цэлы лік. Пункт C мае на плоскасці каардынаты (–1; 0), а на акружыне – каардынаты π, 3π, 5π,.. $-\pi$, -3π, -5π..., якія можна запісаць формулай $\pi + 2\pi n$, дзе n – любы цэлы лік. Пункт D мае на плоскасці каардынаты (0; –1), а на акружыне – каардынаты $\frac{3\pi}{2}$ (тры чвэрткі акружыны ад нулявога пункта), $\frac{7\pi}{2}$ (сем чвэртак акружыны), $\frac{11\pi}{2}$,.. $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$..., якія запісваюцца формулай: $-\frac{\pi}{2}+ 2\pi n$, дзе n – любы цэлы лік.

Як знайсці на такой акружыне пункт Ч з каардынатай, напрыклад, 356 радыянаў?

2π радыянаў – мера цэлай акружыны, дзе π – ірацыянальны лік (бясконцы дзесятковы неперыядычны дроб), роўны 3,14159265... (пры вылічэннях будзем акругляць яго так: 3,14159). Падзяліўшы 356 на 2 і на 3,14159, атрымаем колькасць акружын, якую трэба прайсці ад нулявога пункта акружыны да пункта Ч ($356 : 2 : 3{,}14159 \approx 56{,}659207...$). 56 поўных акружын адкінем ($56{,}659207 - 56 = 0{,}659207$), а 57-ю няпоўную перавядзем у градусы множаннем на 360 ($0{,}659207 \cdot 360 \approx 237$). Засталося паказаць на акружыне пункт Ч з каардынатай 237° (мал.4).

Іншы варыянт такі: калі вы ўсвядомілі, як знаходзіць пункт на акружыне ў градусах, то перавядзіце радыяны ў градусы множаннем на $\frac{180}{\pi}$ (падзяліць на 3,14159 і памножыць на 180) і далей рабіце ўсё ў градусах, як паказана раней.



Малюнак 4

Прагледзім гэтую працэдуру з дапамогай калькулятара яшчэ раз. Знойдзем на акружыне пункт Ю (5385).

5385 дзелім на 3,14159, множым на 180 (атрымалі каардынату ў градусах: 308538,01...), дзелім на 360 (гэта ўжо колькасць акружын: 857,05002...), адкідаем усе цэлыя акружыны (0,05002...) і множым на 360 (гэта частка апошняй, 858-й акружыны ў градусах: $\approx 18^{\circ}$). Пункт з каардынатай 18° і ёсць пункт Ю (мал.4). Другое і трэцяе дзеянні (множанне на 180 і дзяленне на 360) можна замяніць адным дзяленнем на 2, з чаго і бачна, што паказаныя два варыянты нічым не розняцца.

На малюнку 4 паказаны яшчэ тры пункты Ш, Ы, Я , іх каардынаты ў радыянах: –1111; 46,81; 507,6. Паспрабуйце разабрацца, дзе які. Калі гэта ў вас атрымалася, то адкажыце на тое ж пытанне: ці праўда, што вы можаце знайсці пункт на акружыне па **любой** яго каардынаце ў радыянах? Калі вы сумняваецеся, што гэта так, то вам трэба яшчэ патрэніравацца: вазьміце наўздагад нейкі чатырох-, пяці-, шасцізначны лік і знайдзіце пункт з такой каардынатай на акружыне.

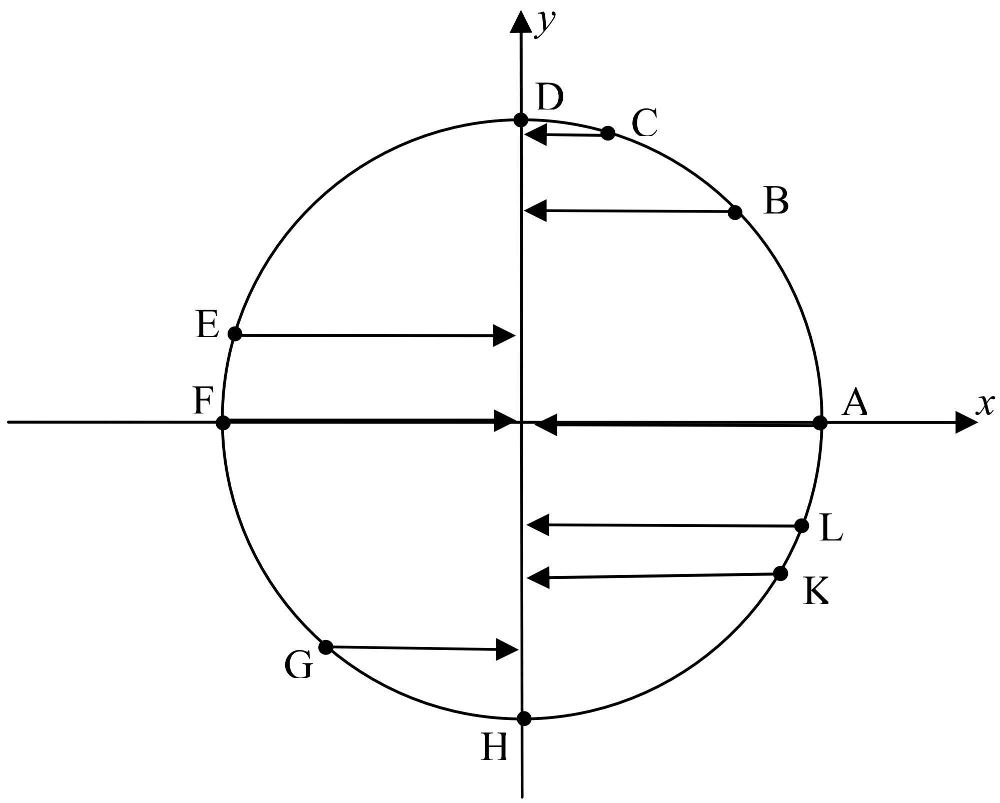
Потым няхай гэта праверыць той, хто робіць такое ўпэўнена. Калі ж адказваеце на пытанне станоўча, то чытаць лікавую акружыну вы навучыліся і можна рухацца далей. З Богам!

II-1. Сінус ліку

Разгледзім тую ж акружыну адзінкавага радыуса з цэнтрам у пачатку каардынатнай плоскасці (раўнанне такой акружыны: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$). Каардынату пункта на акружыне будзем абазначаць грэцкай літарай φ (фі). Грэкі прыдумалі ўсё гэта, таму іх альфабэт часцей і скарыстоўваецца тут.

Акружыну адзінкавага радыуса з цэнтрам у пачатку каардынатнай плоскасці будзем далей называць трыганаметрычнай акружынай (сэнс такой назвы зразумееце пазней).

Калі пункт рухаецца па трыганаметрычнай акружыне, то яго φ змяняецца.. Але пры гэтым змяняюцца і яго каардынаты (x; y) на плоскасці. І гэтыя змяненні ўзаемазвязаныя. Прасочым за імі. Напачатку забудзем пра x і паназіраем за адпаведнасцю паміж φ і y для некаторых пунктаў акружыны (мал.5).



Малюнак 5

Будзем лічыць φ у градусах, гэта болей звыкла (лікі ніжэй пададзены прыблізныя).

Для пункта A: $\varphi = 0^o \rightarrow y = 0$;
B: $\varphi = 50^o \rightarrow y = 0{,}7$;
C: $\varphi = 77^o \rightarrow y = 0{,}9$;
D: $\varphi = 90^o \rightarrow y = 1$;
E: $\varphi = 168^o \rightarrow y = 0{,}3$;
F: $\varphi = 180^o \rightarrow y = 0$;
G: $\varphi = 230^o \rightarrow y = -0{,}8$;
H: $\varphi = 270^o \rightarrow y = -1$;
K: $\varphi = -40^o \rightarrow y = -0{,}6$;
L: $\varphi = 1420^o \rightarrow y = -0{,}4$...

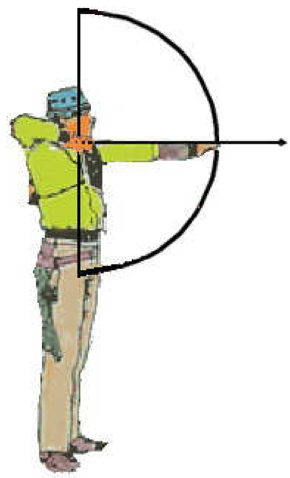
Атрымліваецца, што **любому** φ адпавядае **адзіны** y. Кожнаму – адзін!

Такая адпаведнасць паміж дзвюма зменнымі, калі кожнаму значэнню адной зменнай адпавядае адзінае значэнне другой зменнай, называюць функцыяй. Такім чынам, адпаведнасць паміж φ і y – гэта функцыя. А функцыя – гэта адзін з найцікавейшых паняткаў сучаснай матэматыкі.

Каб функцыю вывучаць, каб гаварыць пра яе, трэба надаць ёй імя. Вось скажаш "лінейная функцыя" – і чалавеку дасведчанаму адразу становіцца зразумелым, пра што ідзе гаворка.

Адпаведнасць паміж φ і y старажытныя грэкі назвалі цецівой лука. У гэтым малюнку (мал. 6) яны ўбачылі лук з нацягнутай цецівой (частка восі ардынат), гатовай выпусціць стралу (вось абсцыс). Цеціва па старагрэцку – **сінус**. Таму адпаведнасць паміж каардынатай φ пункта на трыганаметрычнай акружыне і ардынатай y гэтага пункта на плоскасці называюць сінусам ліку φ.

Прасцей скажам так: **сінусам ліку $\boldsymbol{\varphi}$** называюць ардынату пункта φ трыганаметрычнай акружыны.



Малюнак 6

Адпаведна малюнку 5 і зробленым да яго запісам маем: $sin\, 0^o = 0$; $sin\, 50^o \approx 0{,}7$; $sin\, 77^o \approx 0{,}9$; $sin\, 90^o = 1$; $sin\, 168^o \approx 0{,}3$; $sin\, 180^o = 0$; $sin\, 230^o \approx -0{,}8$; $sin\, 270^o = -1$; $sin\, (-40^o) \approx -0{,}6$; $sin\, 1415^o \approx -0{,}4$ і г.д.

Каб знайсці сінус нейкага ліку α, трэба спачатку знайсці пункт з каардынатай α на трыганаметрычнай акружыне і, апусціўшы перпендыкуляр на вось ардынат, прачытаць на гэтай восі адказ. Самы вялікі сінус: $\sin 90^\circ = 1$. Самы маленькі сінус: $\sin(-90^\circ) = -1$. Такім чынам, сінусы любых лікаў прымаюць значэнні з прамежку **[**-1**;** 1**]**.

Калі да φ дадаць (або адняць) 360° ці 720° (два разы па 360°), ці 1080° (тры разы па 360°),.. увогуле m разоў па 360°, то становішча пункта на акружыне не зменіцца, таму $\sin(\varphi + 360^\circ m) = \sin \varphi$, дзе m – любы цэлы лік (дадатны, адмоўны ці нуль). Такім чынам, 360° – гэта **перыяд** сінуса.

Калі пункт з каардынатай φ на акружыне знаходзіцца ў першай або другой яе чвэрці, то $\sin \varphi$ – лік дадатны. Калі ж пункт з каардынатай φ на акружыне знаходзіцца ў трэцяй або чацвёртай яе чвэрці, то $\sin \varphi$ – лік адмоўны. Два пункты на акружыне маюць сінус, роўны нулю: $\sin 0^\circ = 0$ і $\sin 180^\circ = 0$. Але ж у гэтых пунктаў шмат каардынат, таму можна працягваць: $\sin 360^\circ = 0$, $\sin 540^\circ = 0$, $\sin 720^\circ = 0$... Нуль паўтараецца праз кожныя 180°. Таму, абагульніўшы, можна запісаць так: $\underline{\sin 180^\circ \cdot n = 0}$ (дзе n – любы цэлы лік).

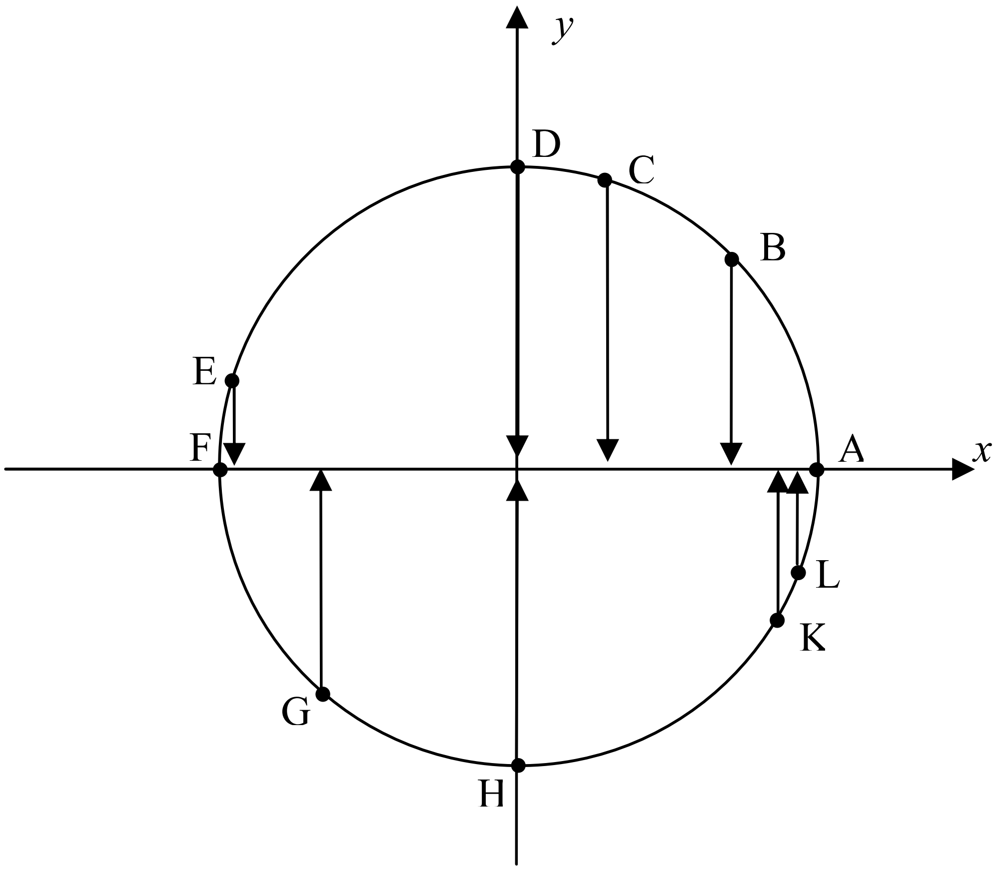
Прыгледзімся да таго, як змяняецца сінус ліку. Калі пункт рухаецца па першай чвэрці акружыны ад 0° да 90°, то сінус павялічваецца (нарастае) ад 0 да 1. У другой чвэрці пры руху пункта ад 90° да 180° сінус змяншаецца (спадае) ад 1 да 0. У трэцяй чвэрці пры руху пункта ад 180° да 270° сінус спадае ад 0 да -1. Нарэшце ў чацвёртай чвэрці пры руху пункта ад 270° да 360° (ці ад -90° да 0°) сінус нарастае ад -1 да 0. Такім чынам сінус нарастае ў чацвёртай і першай чвэрцях, г.зн. нарастае на прамежку $[-90^\circ; 90^\circ]$, і спадае ў другой і трэцяй чвэрцях, г.зн. спадае на прамежку $[90^\circ; 270^\circ]$. А з улікам перыдыячнасці можна сказаць так: $\sin \varphi$ нарастае на прамежках $[-90^\circ+360^\circ k; 90^\circ+360^\circ k]$ і спадае на прамежках $[90^\circ+360^\circ k; 270^\circ+360^\circ k]$, дзе k – любы цэлы лік. (*Сказ “k – любы цэлы лік”, які далей часта будзе паўтарацца, запісваюць так: $k \in Z$, бо літарай Z абазначаюць мноства цэлых лікаў.*)

Прамежкі нарастання і спадання сінуса выкарыстоўваюць для параўнання значэнняў гэтай функцыі. Напрыклад, трэба назваць большы і меншы з лікаў $\sin 1327^\circ$, $\sin(-359^\circ)$ і $\sin 2062^\circ$. Спачатку скарыстаем перыядычнасць функцыі (перыяд, нагадаем, роўны 360°), каб спрасціць гэтыя лікі. $\sin 1327^\circ = \sin 247^\circ$ (аднялі тры перыяды), $\sin(-359^\circ) = \sin 1^\circ$ (дадалі адзін перыяд), $\sin 2062^\circ = \sin 262^\circ$ (аднялі пяць перыядаў). 1° – лік з першай чвэрці, таму $\sin 1^\circ$ дадатны. 247° і 262° – лікі з трэцяй чвэрці, таму іх сінусы адмоўныя. Такім чынам, найбольшы лік ужо ведаем. Для параўнання ж $sin247^{o}$ і $sin62^{o}$ успомнім, што ў трэцяй чвэрці сінус спадае. Гэта азначае, што большым лікам у гэтай чвэрці будуць адпавядаць меншыя сінусы. Выснова: $sin247^{o} > sin262^{o}$. *Адказ*: $sin(-359^{o})$ – найбольшы з дадзеных трох лікаў, $sin2062^{o}$ – найменшы.

II-2. Косінус ліку

Зноў жа разгледзім трыганаметрычную акружыну, г.зн. акружыну адзінкавага радыуса з цэнтрам у пачатку каардынатнай плоскасці (нагадаем, што раўнанне такой акружыны: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$).

Зноў прымусім пункт рухацца па акружыне і паназіраем за адпаведнасцю паміж φ і x для некаторых пунктаў акружыны (мал.7). Будзем вызначаць φ спачатку ў градусах.



Малюнак 7

Для пункта A: $\varphi = 0^{o} \rightarrow x = 1$;
B: $\varphi = 50^{o} \rightarrow x = 0{,}7$;
C: $\varphi = 77^{o} \rightarrow x = 0{,}3$;
D: $\varphi = 90^{o} \rightarrow x = 0$;
E: $\varphi = 168^{o} \rightarrow x = -0{,}9$;

F: $\varphi = 180^{\circ} \rightarrow x = -1$;
G: $\varphi = 230^{\circ} \rightarrow x = -0{,}6$;
H: $\varphi = 270^{\circ} \rightarrow x = 0$;
K: $\varphi = -40^{\circ} \rightarrow x = 0{,}8$;
L: $\varphi = 1420^{\circ} \rightarrow x = -0{,}9$...

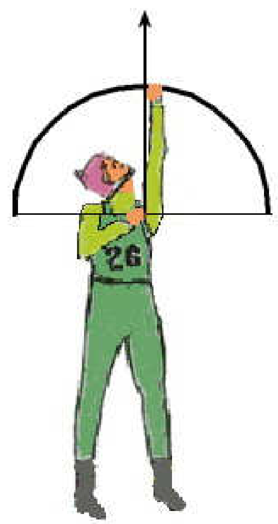
Атрымліваецца, што **любому** φ адпавядае **адзіны** x. І тут: кожнаму – адзін!

Такім чынам, адпаведнасць паміж φ і x – гэтаксама функцыя. Для яе вывучэння трэба надаць ёй імя. Старажытныя грэкі назвалі такую функцыю дадатковай цецівой (па іхняму камплемэнтэ сінус, скарочана **косінус**).

У гэтым малюнку (мал.8) яны ўбачылі яшчэ адзін лук з нацягнутай цецівой (частка восі абсцыс), гатовай выпусціць стралу (вось ардынат).

Такім чынам, **косінусам** ліку φ называюць абсцысу пункта трыганаметрычнай акружыны, які мае на акружыне каардынату φ.

Адпаведна малюнку 7 і зробленым да яго запісам атрымліваем: $\cos 0^{\circ} = 1$; $\cos 50^{\circ} \approx 0{,}7$; $\cos 77^{\circ} \approx 0{,}3$; $\cos 90^{\circ} = 0$; $\cos 168^{\circ} \approx -0{,}9$; $\cos 180^{\circ} = -1$; $\cos 230^{\circ} \approx -0{,}6$; $\cos 270^{\circ} = 0$; $\cos(-40^{\circ}) \approx 0{,}8$; $\cos 1420^{\circ} \approx -0{,}9$ і г.д.



Малюнак 8

Каб знайсці косінус нейкага ліку α, трэба спачатку знайсці пункт з каардынатай α на трыганаметрычнай акружыне і, апусціўшы перпендыкуляр на вось абсцыс, прачытаць на гэтай восі адказ. Самы вялікі косінус: $\cos 0^{\circ} = 1$. Самы маленькі косінус: $\cos 180^{\circ} = -1$. Такім чынам, косінусы любых лікаў прымаюць значэнні з прамежку $[-1; 1]$.

Калі да φ дадаць (або адняць) 360° ці 720° (два разы па 360°), ці 1080° (тры разы па 360°),.. увогуле m разоў па 360°, то становішча пункта на акружыне не зменіцца, таму $\cos(\varphi + 360^{\circ}m) = \cos \varphi$), дзе m – любы цэлы лік (дадатны, адмоўны ці нуль). Такім чынам, 360° – гэта **перыяд** косінуса.

Калі пункт з каардынатай φ на акружыне знаходзіцца ў першай або чацвёртай яе чвэрці, то $\cos \varphi$ – лік дадатны. Калі ж пункт з каардынатай φ на акружыне знаходзіцца ў другой або трэцяй яе чвэрці, то $\cos \varphi$ – лік адмоўны. Два пункты на акружыне маюць косінус, роўны нулю: $\cos 90^{\circ} = 0$ і $\cos 270^{\circ} = 0$. Але ж у гэтых пунктаў шмат каардынат, таму можна працягваць: $\cos 450^{\circ} = 0$, $\cos 810^{\circ} = 0$, $\cos(-90^{\circ}) =$

0... Нуль паўтараецца праз кожныя 180^o. Таму, абагульніўшы, можна запісаць так: $\underline{cos(90^o + 180^o \cdot p) = 0}$ (дзе p – любы цэлы лік).

Прыгледзімся да таго, як змяняецца косінус ліку. Калі пункт рухаецца па першай чвэрці акружыны ад 0^o да 90^o, то косінус спадае ад 1 да 0. У другой чвэрці пры руху пункта ад 90^o да 180^o косінус спадае ад 0 да –1. У трэцяй чвэрці пры руху пункта ад 180^o да 270^o косінус нарастае ад –1 да 0. Нарэшце ў чацвёртай чвэрці пры руху пункта ад 270^o да 360^o (ці ад -90^o да 0^o) косінус нарастае ад 0 да 1. Такім чынам косінус спадае ў першай і другой чвэрцях, г.зн. спадае на прамежку $[0^o; 180^o]$, і нарастае ў трэцяй і чацвёртай чвэрцях, г.зн. нарастае на прамежку $[180^o; 360^o]$. А з улікам перыядычнасці можна сказаць так: $cos\ \varphi$ спадае на прамежках $[360^o k; 180^o+360^o k]$ і нарастае на прамежках $[180^o+360^o k; 360^o+360^o k]$, дзе k – любы цэлы лік.

Прамежкі нарастання і спадання косінуса выкарыстоўваюць для параўнання значэнняў гэтай функцыі. Напрыклад, трэба назваць большы і меншы з лікаў $cos1327^o$, $cos(-359^o)$ і $cos2062^o$. Спачатку скарыстаем перыядычнасць функцыі (перыяд, нагадаем, роўны 360^o), каб спрасціць гэтыя лікі. $cos1327^o = cos247^o$ (аднялі тры перыяды), $cos(-359^o) = cos1^o$ (дадалі адзін перыяд), $cos2062^o = cos262^o$ (аднялі пяць перыядаў). 1^o – лік з першай чвэрці, таму $cos1^o$ дадатны. 247^o і 262^o – лікі з трэцяй чвэрці, таму іх косінусы адмоўныя. Такім чынам, найбольшы лік ужо ведаем. Для параўнання ж $cos247^o$ і $cos262^o$ успомнім, што ў трэцяй чвэрці косінус нарастае. Гэта азначае, што большым лікам у гэтай чвэрці будуць адпавядаць большыя косінусы. Выснова: $cos\ 247^o < cos262^o$. *Адказ*: найбольшы з дадзеных трох лікаў: $cos(-359^o)$, найменшы: $cos1327^o$.

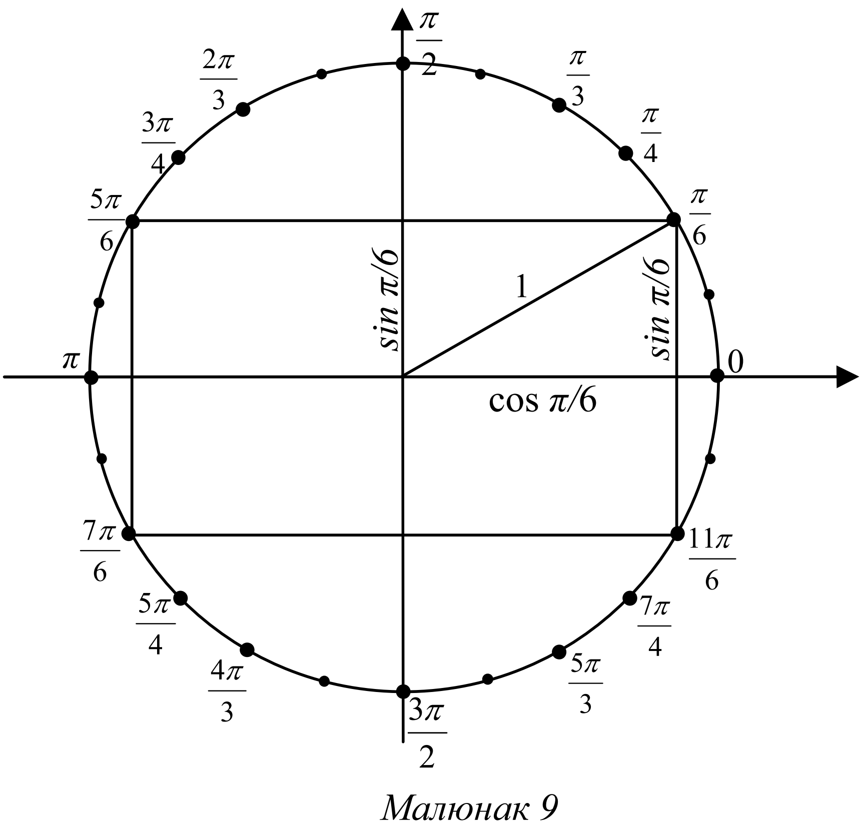
II-3. Значэнні сінуса і косінуса асобных вуглоў

Каб знайсці сінус ліку (напрыклад, 356,2) трэба спачатку знайсці лік з такой каардынатай (у радыянах) на трыганаметрычнай акружыне. Помніце, як гэта робіцца? Дадзены лік дзелім на π і на 2 (356,2 : 3,14159... : 2 = 56,691035...), адкідаем цэлыя і рэшту множым на 360 ($0{,}691035 \cdot 360 \approx 249$). Адзначыўшы пункт з каардынатай 249^o на акружыне, апускаем з яго перпендыкуляр на вось сінусаў (вось ардынат), дзе і чытаем адказ: $sin356{,}2 \approx -0{,}9$.

Каб знайсці косінус ліку φ, трэба спачатку знайсці патрэбны пункт на акружыне і апусціць з яго перпендыкуляр на лінію косінусаў (вось абсцыс), дзе і прачытаем адказ: $cos356{,}2 \approx -0{,}4$.

Атрыманыя такім чынам адказы прыблізныя. Але для некаторых пунктаў акружыны можна вызначыць сінус і косінус не прыблізна, а дакладна. Такіх пунктаў у нас будзе 24, яны раўнамерна размяшчаюцца на акружыне праз кожныя 15°, пачынаючы ад нулявога яе пункта.

15° – гэта $\frac{\pi}{12}$ радыянаў. Падзелім акружыну на 24 роўныя дугі і падпішам атрыманыя пункты ў радыянах: $\frac{\pi}{12}$; $\frac{2\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{12}$; $\frac{4\pi}{12}$..., скарачаючы дробы там, дзе яны скарачаюцца, і прапускаючы іх там, дзе яны не скарачаюцца (г.зн. пункты з каардынатамі $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$... падпісваць не будзем). Атрымаем тое, што паказана на малюнку 9.



Малюнак 9

Злучым пункты з назоўнікам 6 ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ і $\frac{11\pi}{6}$) адрэзкамі, якія абляумоюць прамавугольнік, умежаны ў акружыну. Калі правесці радыус у пункт $\frac{\pi}{6}$, то ўбачым прамавугольны трохвугольнік, катэты якога *sin* $\frac{\pi}{6}$ і *cos* $\frac{\pi}{6}$, а гіпатэнуза роўная 1. Меншы вугал гэтага трохвугольніка $\frac{\pi}{6}$ радыян або 30°. Катэт насупраць такога вугла роўны палове гіпатэнузы, г.зн. роўны $\frac{1}{2}$. Але гэты катэт паказвае сінус ліку $\frac{\pi}{6}$, таму $sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Другі катэт трохвугольніка ляжыць на восі абсцыс і паказвае *cos* $\frac{\pi}{6}$, таму *cos* $\frac{\pi}{6}$ можа быць разлічаны пры дапамозе тэарэмы Піфагора: $cos\ \frac{\pi}{6} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

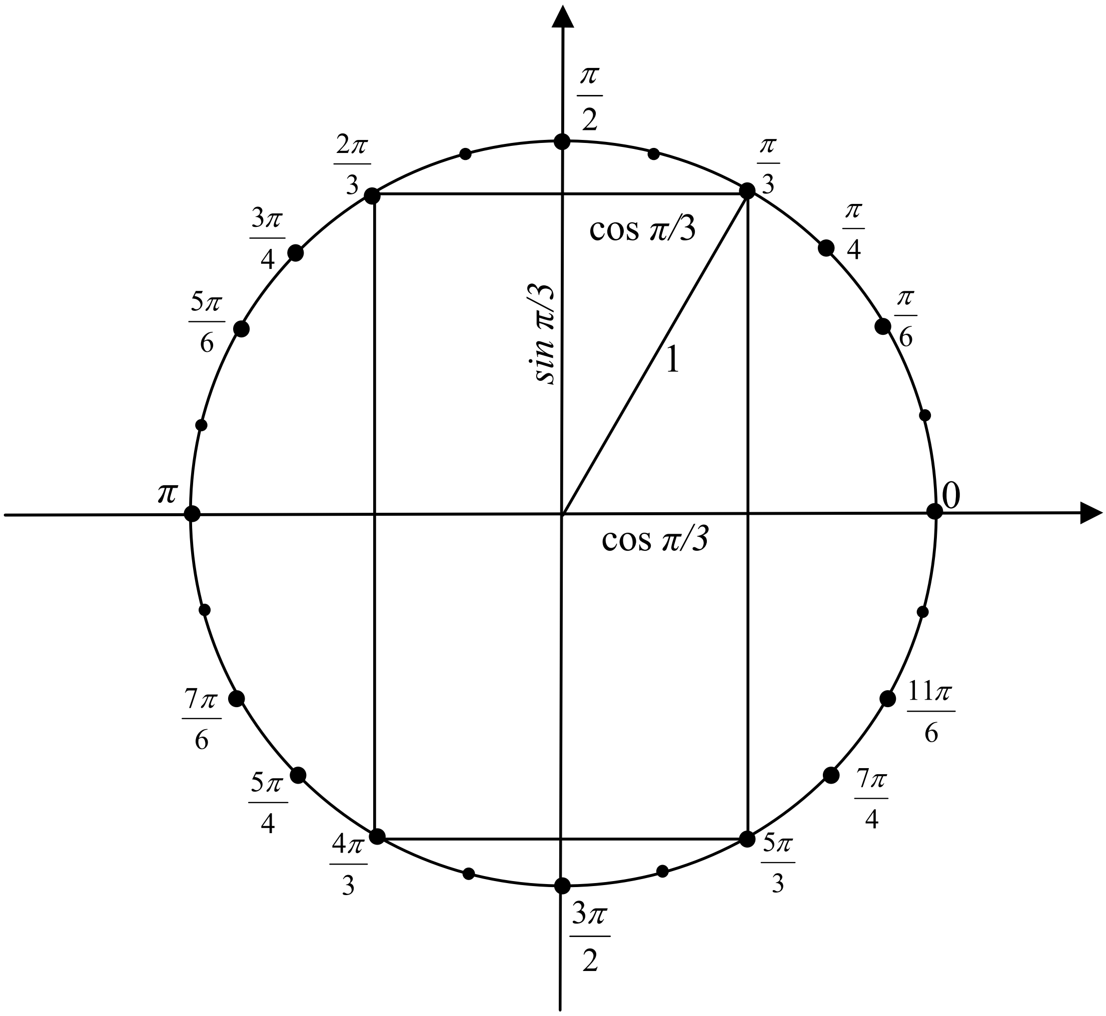
Цяпер вы ведаеце дакладныя значэнні сінуса і косінуса чатырох пунктаў акружыны:

$sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $sin\ \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, $sin\ \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $sin\ \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (або $sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$);

$cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\ \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\ \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\ \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (або $cos\ (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Злучыўшы адрэзкамі пункты з назоўнікам 3 ($\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$), атрымаем гэткі ж прамавугольнік, павёрнуты вакол цэнтра акружыны на 90° (мал.10). Цяпер яшчэ 4 пункты акружыны атрымалі дакладныя значэнні сінуса і косінуса:

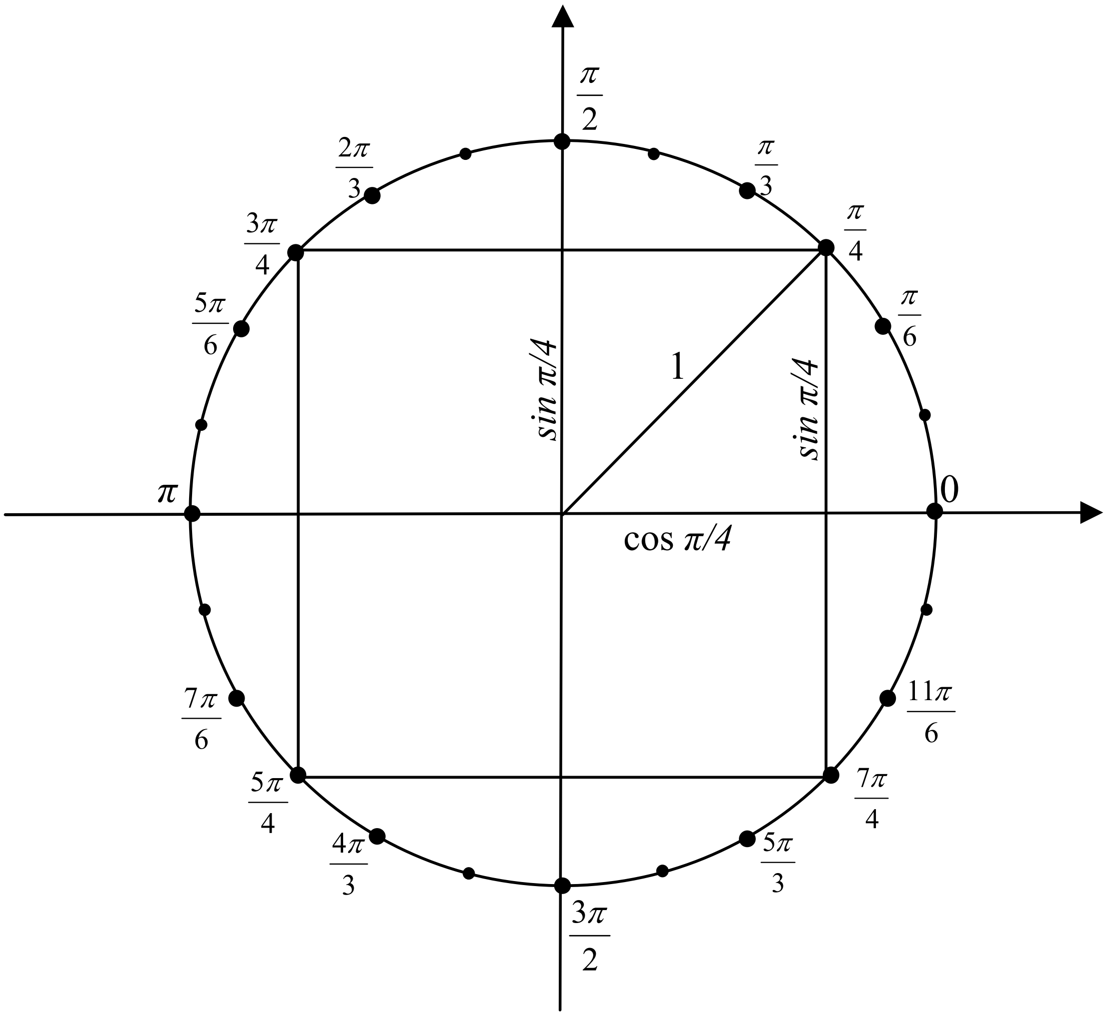
$sin\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\ \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\ \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $sin\ \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (або $sin\ (-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$);



Малюнак 10

$cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $cos\ \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $cos\ \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $cos\ \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (або $cos\ (-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$).

Засталося (гл.мал.11) злучыць адрэзкамі пункты акружыны з назоўнікам 4 ($\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ і $\frac{7\pi}{4}$). Атрымаецца квадрат, бо пункт $\frac{\pi}{4}$ роўнаадлеглы ад восяў каардынат. Радыус, праведзены ў пункт $\frac{\pi}{4}$, утворыць з воссю абсцыс вугал 45^o, таму прамавугольны трохвугольнік з катэтам на гэтай восі раўнабокі (бо другі яго востры вугал таксама 45^o). Абзавем гэтыя катэты літарай k, тады па тэарэме Піфагора $k^2 + k^2 = 1$, $2k^2 = 1$, $k^2 = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. І яшчэ 4 пункты акружыны атрымалі дакладныя значэнні сінуса і косінуса:



Малюнак 11

$$sin\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ sin\ \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ sin\ \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ sin\ \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(або $sin\ (-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$);

$$cos\ \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ cos\ \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ cos\ \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ cos\ \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(або $cos\ (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

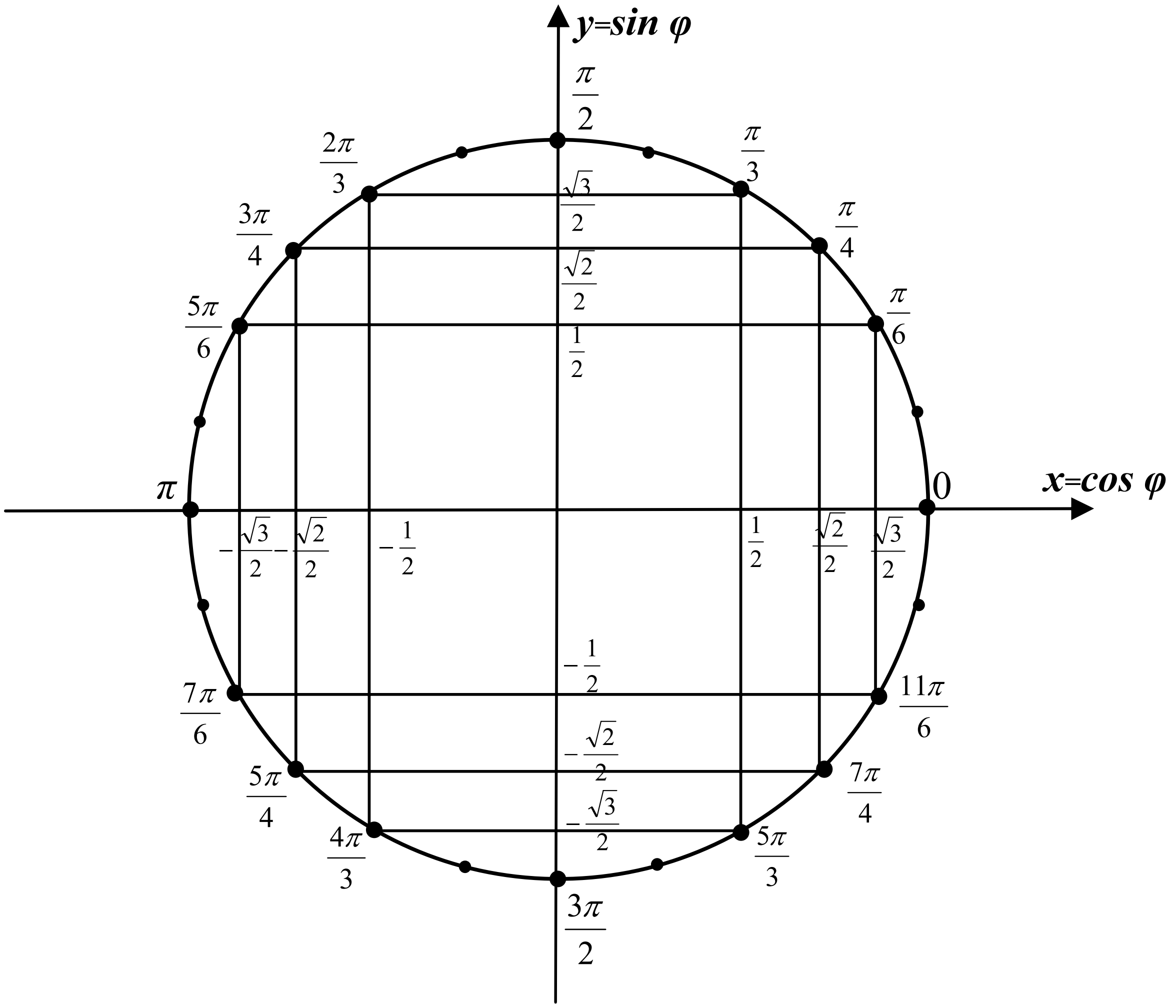
Нагадаем, што раней вы ўжо ведалі дакладныя значэнні чатырох пунктаў акружыны на яе перасячэнні з восямі:

$$sin\ 0 = 0,\ sin\ \frac{\pi}{2} = 1,\ sin\ \pi = 0,\ sin\ \frac{3\pi}{2} = -1 \text{ (або } sin\ (-\frac{\pi}{2}) = -1\text{);}$$

$$cos\ 0 = 1,\ cos\ \frac{\pi}{2} = 0,\ cos\ \pi = -1,\ cos\ \frac{3\pi}{2} = 0 \text{ (або } cos\ (-\frac{\pi}{2}) = 0\text{).}$$

Усяго, такім чынам, маюцца 16 пунктаў акружыны, для якіх вы павінны ведаць дакладныя значэнні сінуса і косінуса. Абяцаліся 24? Пра астатнія 8 пазней (дый ведаць іх неабавязкова).

Цяпер вам трэба ўважліва паглядзець на малюнак 12. Ці ўсё вы там разумееце? Калі ўсё, то цяпер засталося яго запомніць, бо да гэтага малюнка вам трэ будзе раз-пораз звяртацца.

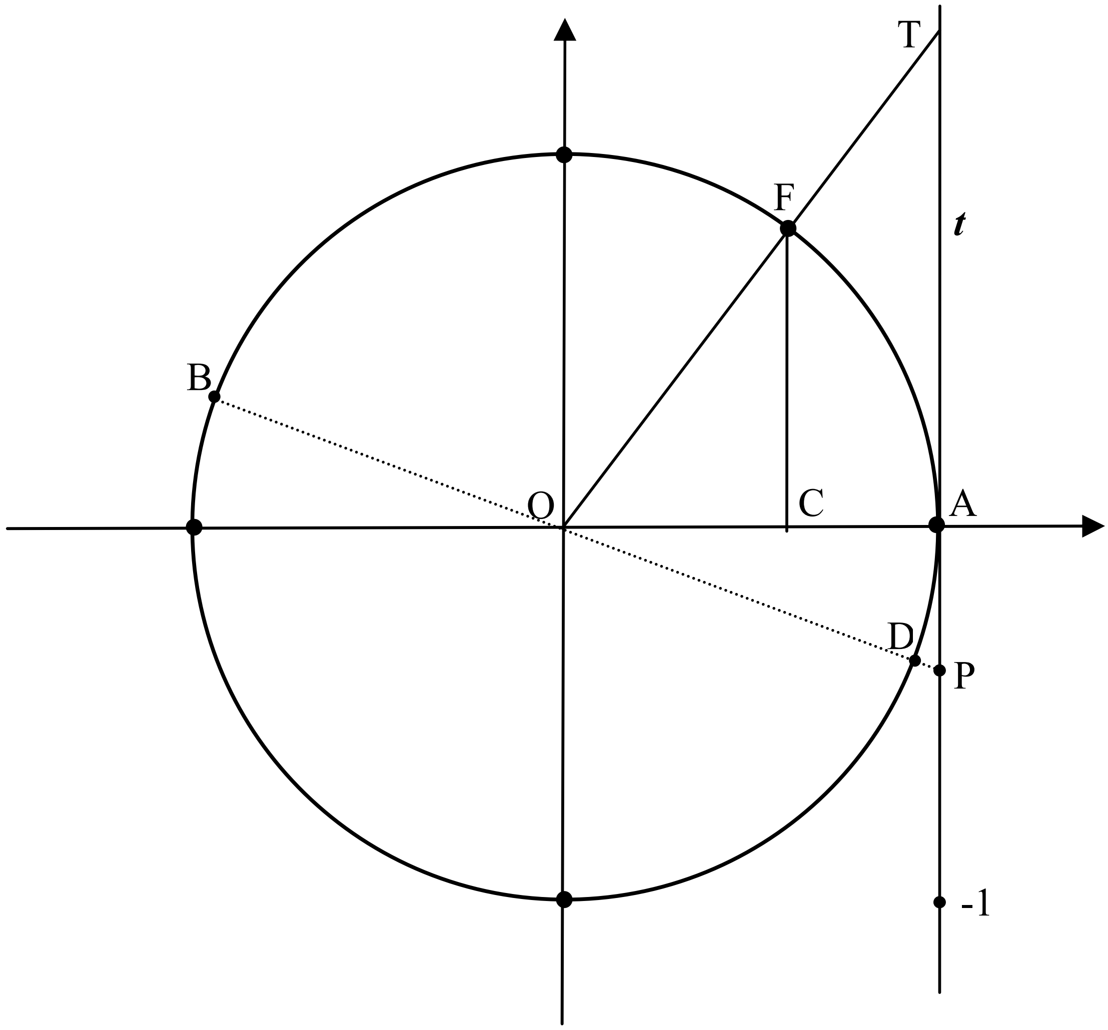


Малюнак 12

II-4. Тангенс ліку

Тангенсам ліку будзем называць адносіну сінуса гэтага ліку да яго косінуса.

Значыць, каб знайсці тангенс нейкага ліку φ (абазначаюць так: $tg\ \varphi$), трэба знайсці пункт з каардынатай φ на трыганаметрычнай акружыне і, апусціўшы перпендыкуляры на восі ардынат і абсцыс, вызначыць яго сінус і косінус; затым, падзяліўшы сінус ліку на косінус ліку, знайсці тангенс гэтага ліку. Паспрабуем спрасціць гэтую працэдуру. Для гэтага зноў жа разгледзім трыганаметрычную акружыну, да якой праз нулявы яе пункт A правядзем датычную *t* (мал.13).



Малюнак 13

Няхай пункт F на акружыне мае каардынату φ, тады яго каардынаты на плоскасці ($cos\ \varphi$; $sin\ \varphi$). Правядзем праз пункты F і O (пачатак каардынат) прамую, няхай яна перасячэ датычную *t* у пункце T. І апусцім перпендыкуляр FC на вось абсцыс. Прыгледзімся да трохвугольнікаў OFC і OTA. Яны прамавугольныя і маюць агульны вугал з вяршыняй O, а таму падобныя (адпаведна прымеце падобнасці трохвугольнікаў па двух вуглах). А ў падобных трохвугольнікаў стораны прапарцыянальныя. Складзем гэтую прапорцыю для катэтаў. Для гэтага адзначым, што катэты трохвугольніка OFC маюць даўжыні $OC = |cos\ \varphi|$, $FC = |sin\ \varphi|$ (паколькі пункт F мог быць выбраным у любой чвэрці, то $sin\ \varphi$ або $cos\ \varphi$ маглі б аказацца адмоўнымі, а даўжыня адрэзка не можа быць адмоўнай, таму модулі тут дарэчы), а катэты трохвугольніка OTA маюць даўжыні $OA = 1$ (акружына ж адзінкавага радыуса) і AT = t (так мы гэты катэт назавем, абазначым). Атрымалася такая прапорцыя:

$$\frac{t}{1} = \frac{|\sin\varphi|}{|\cos\varphi|}.$$

Але ж $\frac{t}{1} = t$, а $\frac{|\sin\varphi|}{|\cos\varphi|} = |tg\ \varphi|$. Атрымалі, што $t = |tg\ \varphi|$. З апошняй роўнасці атрымліваецца, што даўжыня адрэзка t паказвае модуль тангенса ліку φ. Таму датычную, праведзеную праз нулявы пункт трыганаметрычнай акружыны, называюць лініяй тангенсаў (*у перакладзе са старагрэцкай: тангенс – датычная*). Калі на лініі тангенсаў увесці шкалу, адпаведную шкале на восі ардынат (пункт А – нулявы пункт, дадатны кірунак уверх і той жа адзінкавы адрэзак), то пункты на лініі тангенсаў будуць паказваць тангенсы пунктаў акружыны. Прасочым, як.

Каб знайсці, напрыклад, тангенс ліку 5777 ($tg5777$), знойдзем спачатку пункт з такой каардынатай на акружыне. (Не забылі яшчэ, як гэта робіцца? 5777 : 2 : π = 937,4388829..., адкідаем цэлыя і рэшту множым на 360^{o}, $0{,}4388829 \cdot 360 \approx 158$). Гэта – пункт В (мал.13). Правёўшы праз пункт В і праз цэнтр акружыны прамую, атрымаем на перасячэнні яе з лініяй тангенсаў пункт Р. Каардыната пункта Р на лініі тангенсаў і дасць адказ: $tg5777 \approx -0{,}3$.

Калі да каардынаты пункта В дадаць лік π (палову акружыны), то атрымаем пункт дыяметральна супрацьлеглы (пункт D). Прамая, якая праходзіць праз пункт D і цэнтр акружыны, супадае з прамой, якая праходзіць праз пункт В і цэнтр акружыны, таму тангенсы гэтых пунктаў аднолькавыя: $tg(5777+\pi) = tg5777$. Відавочна, што ў любых дыяметральна супрацьлеглых пунктаў акружыны тангенсы аднолькавыя, таму π – перыяд тангенса: $tg\ (x+\pi n) = tg\ x$ для любых x і любых цэлых n. Або ў градусах: $tg\ (x+180^{o}n) = tg\ x$ для любых x і любых цэлых n.

У пунктаў $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$ тангенса не існуе, бо прамая, праведзеная праз гэтыя пункты і праз цэнтр акружыны, будзе паралельнай лініі тангенсаў і не перасячэ яе. Гэта й зразумела: косінусы гэтых лікаў роўныя нулю, а на нуль жа дзяліць нельга.

Там, дзе сінус і косінус маюць аднолькавыя знакі, тангенсы дадатныя, а дзе знакі сінуса і косінуса розныя, – тангенсы адмоўныя. Атрымліваецца, што тангенсы дадатныя ў I і III каардынатных чвэрцях і адмоўныя – у II і IV каардынатных чвэрцях.

Пры дадатным руху пункта па першай чвэрці акружыны (ад 0 да $\frac{\pi}{2}$) тангенс нарастае ад нуля да бясконцасці (тое ж будзе у III чвэрці, бо π – перыяд тангенса). Пры дадатным руху пункта па другой чвэрці акружыны (ад $\frac{\pi}{2}$ да π) тангенс нарастае ад мінус бясконцасці да нуля (тое ж будзе ў IV чвэрці). Такім чынам, тангенс нарастае ад мінус бясконцасці да плюс бясконцасці на прамежку ($-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$) – IV і I чвэрці трыганаметрычнай акружыны. З улікам перыядычнасці тангенса можна сказаць, што тангенс ліку нарастае на прамежках ($-\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$), дзе k – любы цэлы лік ($k\in Z$).

II-5. Катангенс ліку

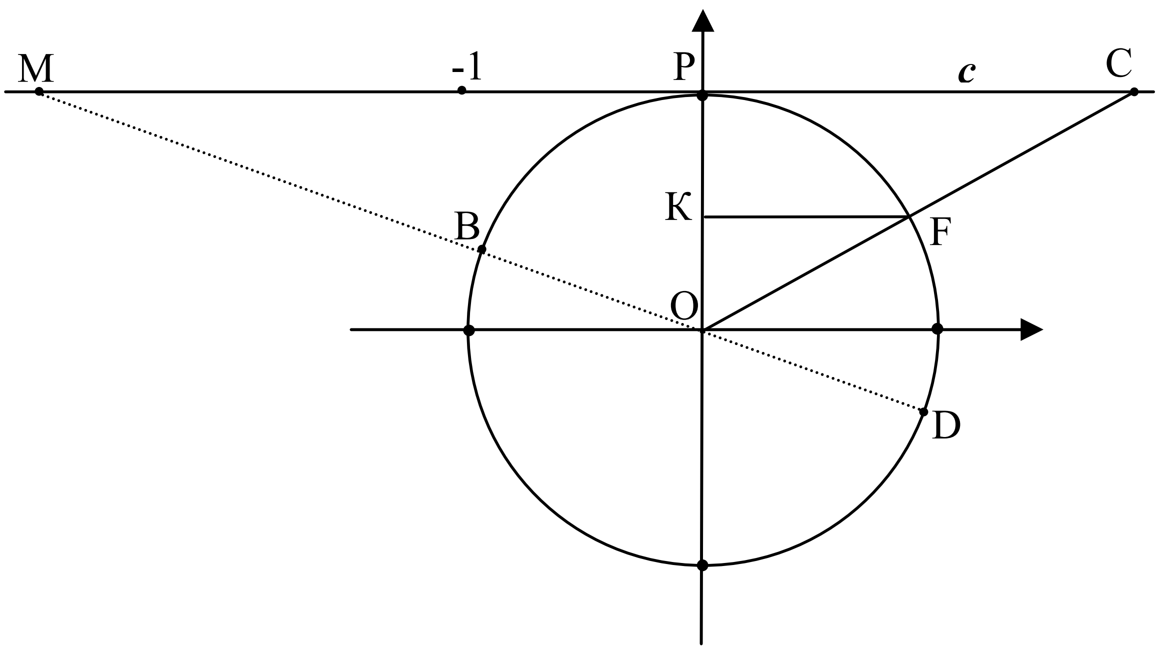
Катангенсам ліку будзем называць адносіну косінуса гэтага ліку да яго сінуса.

Значыць, каб знайсці катангенс нейкага ліку φ (абазначаюць так: $ctg\ \varphi$), трэба знайсці пункт з каардынатай φ на трыганаметрычнай акружыне і, апусціўшы перпендыкуляры на восі абсцыс і ардынат, вызначыць яго косінус і сінус; затым, падзяліўшы косінус ліку на сінус ліку, знайсці катангенс гэтага ліку. Каб спрасціць гэтую працэдуру, зноў разгледзім трыганаметрычную акружыну, да якой правядзем датычную c праз пункт Р ($\frac{\pi}{2}$) (мал.14).

Няхай пункт F на акружыне мае каардынату φ, тады яго каардынаты на плоскасці ($cos\ \varphi$; $sin\ \varphi$). Правядзем праз пункты F і O (пачатак каардынат) прамую, няхай яна перасячэ датычную c у пункце С. І апусцім перпендыкуляр FK на вось ардынат. Прыгледзімся да трохвугольнікаў OFK і OCP. Яны прамавугольныя і маюць агульны вугал з вяршыняй O, а таму падобныя (адпаведна прымеце падобнасці трохвугольнікаў па двух вуглах). А ў падобных трохвугольнікаў стораны прапарцыянальныя. Складзем гэтую прапорцыю для катэтаў. Для гэтага адзначым, што катэты трохвугольніка OFK маюць даўжыні FK = $|cos\ \varphi|$, OK = $|sin\ \varphi|$, а катэты трохвугольніка OCP маюць даўжыні OP = 1 (акружына ж адзінкавага радыуса) і PC = c (так мы гэты катэт назавем, абазначым). Атрымалася такая прапорцыя:

$$\frac{c}{1} = \frac{|\cos\varphi|}{|\sin\varphi|}.$$

Але ж $\frac{c}{1} = c$, а $\frac{|\cos\varphi|}{|\sin\varphi|} = |ctg\ \varphi|$. Атрымалі, што $c = |ctg\ \varphi|$. З апошняй роўнасці атрымліваецца, што даўжыня адрэзка c паказвае модуль катангенса ліку φ. Таму датычную, праведзеную да трыганаметрычнай акружыны праз пункт $\frac{\pi}{2}$, называюць лініяй катангенсаў (кампліментэ тангенс – дадатковая датычная). Калі на лініі катангенсаў увесці шкалу, адпаведную шкале на восі абсцыс (пункт P – нулявы пункт, дадатны кірунак управа і той жа адзінкавы адрэзак), то пункты на лініі катангенсаў будуць паказваць катангенсы пунктаў акружыны. Прасочым, як.



Малюнак 14

Каб знайсці, напрыклад, катангенс ліку 5777 (ctg5777), знойдзем спачатку пункт з такой каардынатай на акружыне. Гэта – той жа пункт B (мал.13 і мал. 14). Правёўшы праз пункт B і праз цэнтр акружыны прамую, атрымаем на перасячэнні яе з лініяй катангенсаў пункт M. Каардыната пункта M на лініі катангенсаў і дасць адказ: $ctg5777 \approx -3$.

Калі да каардынаты пункта B дадаць лік π (палову акружыны), то атрымаем пункт дыяметральна супрацьлеглы (пункт D). Прамая, якая праходзіць праз пункт D і цэнтр акружыны, супадае з прамой, якая праходзіць праз пункт B і цэнтр акружыны, таму катангенсы гэтых пунктаў аднолькавыя: $ctg\ (5777+\pi) = ctg\ 5777$. Відавочна, што ў любых дыяметральна супрацьлеглых пунктаў акружыны катангенсы аднолькавыя, таму π – перыяд катангенса: $ctg\ (x+\pi n) = ctg\ x$ для любых x і любых цэлых n. Або ў градусах: $ctg\ (x+180^\circ n)= ctg\ x$ для любых x і любых цэлых n.

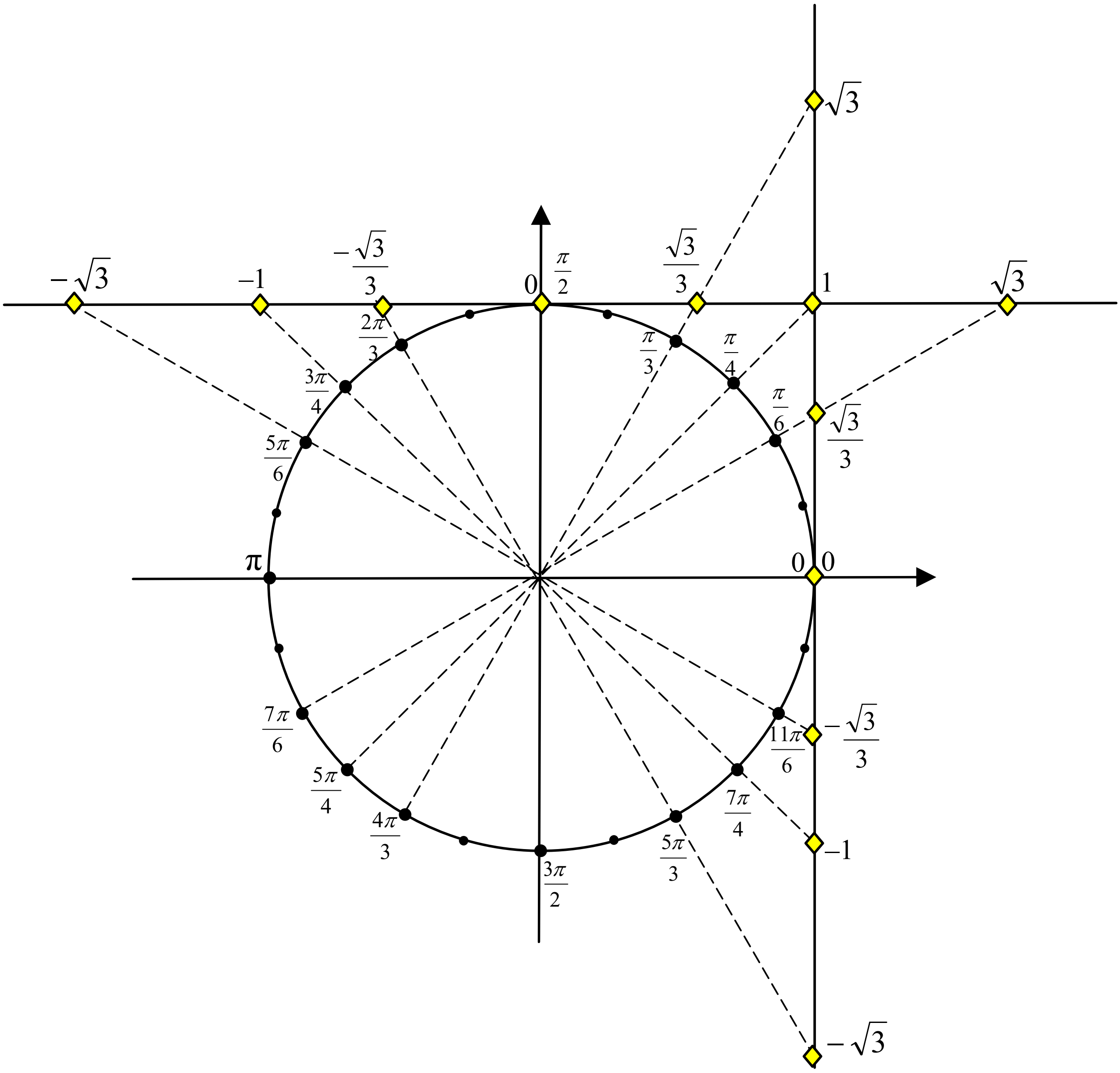
У пунктаў 0 і π катангенса не існуе, бо прамая, праведзеная праз гэтыя пункты і праз цэнтр акружыны, будзе паралельнай лініі катангенсаў і не перасячэ яе. Гэта й зразумела: сінусы гэтых лікаў роўныя нулю, а на нуль жа дзяліць нельга.

Там, дзе сінус і косінус маюць аднолькавыя знакі, катангенсы дадатныя, а дзе знакі сінуса і косінуса розныя, – катангенсы адмоўныя. Атрымліваецца, што катангенсы дадатныя ў I і III каардынатных чвэрцях і адмоўныя – у II і IV каардынатных чвэрцях (як і тангенсы).

Пры дадатным руху пункта па першай чвэрці акружыны (ад 0 да $\frac{\pi}{2}$) катангенс спадае ад бясконцасці да нуля (тое ж будзе у III чвэрці, бо π – перыяд катангенса). Пры дадатным руху пункта па другой чвэрці акружыны (ад $\frac{\pi}{2}$ да π) катангенс спадае ад нуля да мінус бясконцасці (тое ж будзе ў IV чвэрці). Такім чынам, катангенс спадае ад плюс бясконцасці да мінус бясконцасці на прамежку $(0; \pi)$ – I і II чвэрці трыганаметрычнай акружыны. З улікам перыядычнасці катангенса можна сказаць, што катангенс ліку спадае на прамежках $(\pi k; \pi + \pi k)$, дзе k – любы цэлы лік ($k \in Z$).

II-6. Значэнні тангенса і катангенса асобных вуглоў

Як знайсці тангенс ці катангенс ліку прыбліжана з дапамогай трыганаметрычнай акружыны, спадзяемся, вы ўжо ўсвядомілі. Зараз пагаворым пра тыя пункты трыганаметрычнай акружыны, тангенс і катангенс якіх вы павінны ведаць дакладна. Гэта тыя самыя пункты, для якіх вы ўжо ведаеце дакладныя значэнні сінуса і косінуса. Знайсці тангенс ці катангенс ліку дзяленнем сінуса на косінус ці косінуса на сінус цяпер ужо не праблема. Але цікава паглядзець, дзе гэтыя значэнні адлюстроўваюцца на адпаведных прамых (лініі тангенсаў і лініі катангенсаў). Вынік убачым на малюнку 15.



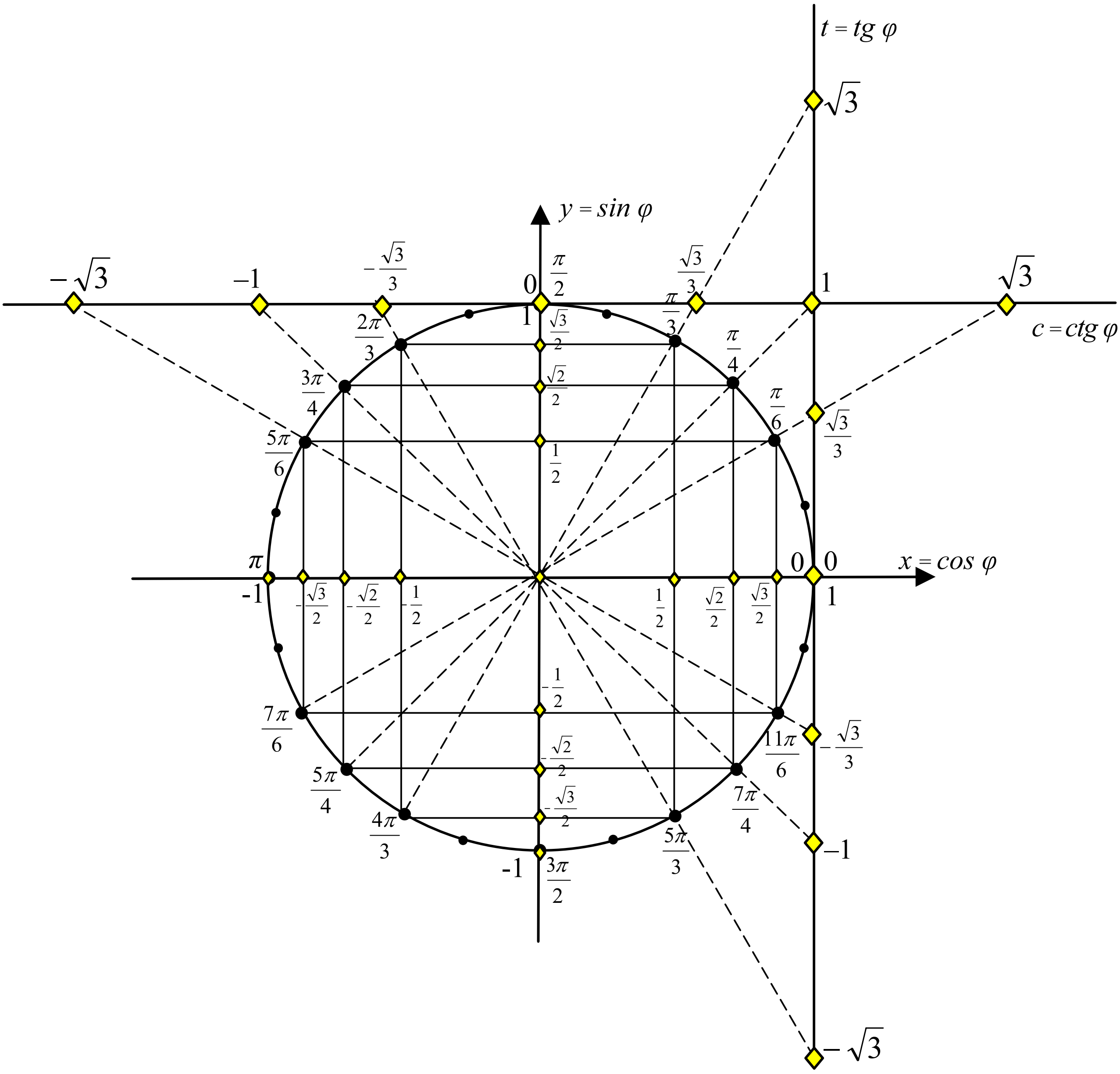
Малюнак 15

Патлумачэнне: $tg\frac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (гэты лік і падпісаны каля адпаведнага ромбіка на лініі тангенсаў); $ctg\frac{\pi}{6} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2} = \sqrt{3}$ (на лініі катангенсаў першы справа ромбік адлюстроўвае знойдзены тут лік). І гэтак далей.

Такім чынам, 16 пунктаў трыганаметрычнай акружыны атрымалі дакладныя значэнні тангенса і катангенса. Чаму ж новых лікаў не 32? Па-першае, таму што існуюць такія пункты акружыны, якія не маюць тангенсаў ($\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$) і такія пункты, якія не маюць катангенсаў (0 і π). Па-другое, таму што перыяд π тангенса і катангенса ўдвая меншы за перыяд 2π сінуса і косінуса; гэта азначае, што дыяметральна супрацьлеглым пунктам акружыны адпавядаюць аднолькавыя тангенсы і аднолькавыя катангенсы. Усяго атрымалася 7 значэнняў на лініі тангенсаў і 7 гэткіх жа значэнняў на лініі катангенсаў. Запомніць іх зусім проста: акрамя 0 і ±1 там яшчэ маюцца $\sqrt{3}$ і $\frac{1}{\sqrt{3}}$, заменены на $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (не забудзьце і тут пра знакі "плюс" або "мінус").

Цяпер абагульнены малюнак 12 можна дапоўніць (гл.мал.16). Скапіруйце гэты малюнак і развешайце яго ў сваёй кватэры, каб ён як найчасцей трапляў вам на вочы (каля свайго працоўнага месца, на кухні, каля ложка, на якім спіце, у прыбіральні...). У гэтым выпадку вы і не заўважыце, як праз два тыдні малюнак сам залезе ў вашу памяць і надзейна замацуецца ў ёй. Што і трэба. Бо праз гэты малюнак вы будзеце без цяжкасцяў усведамляць далейшую трыганаметрыю.

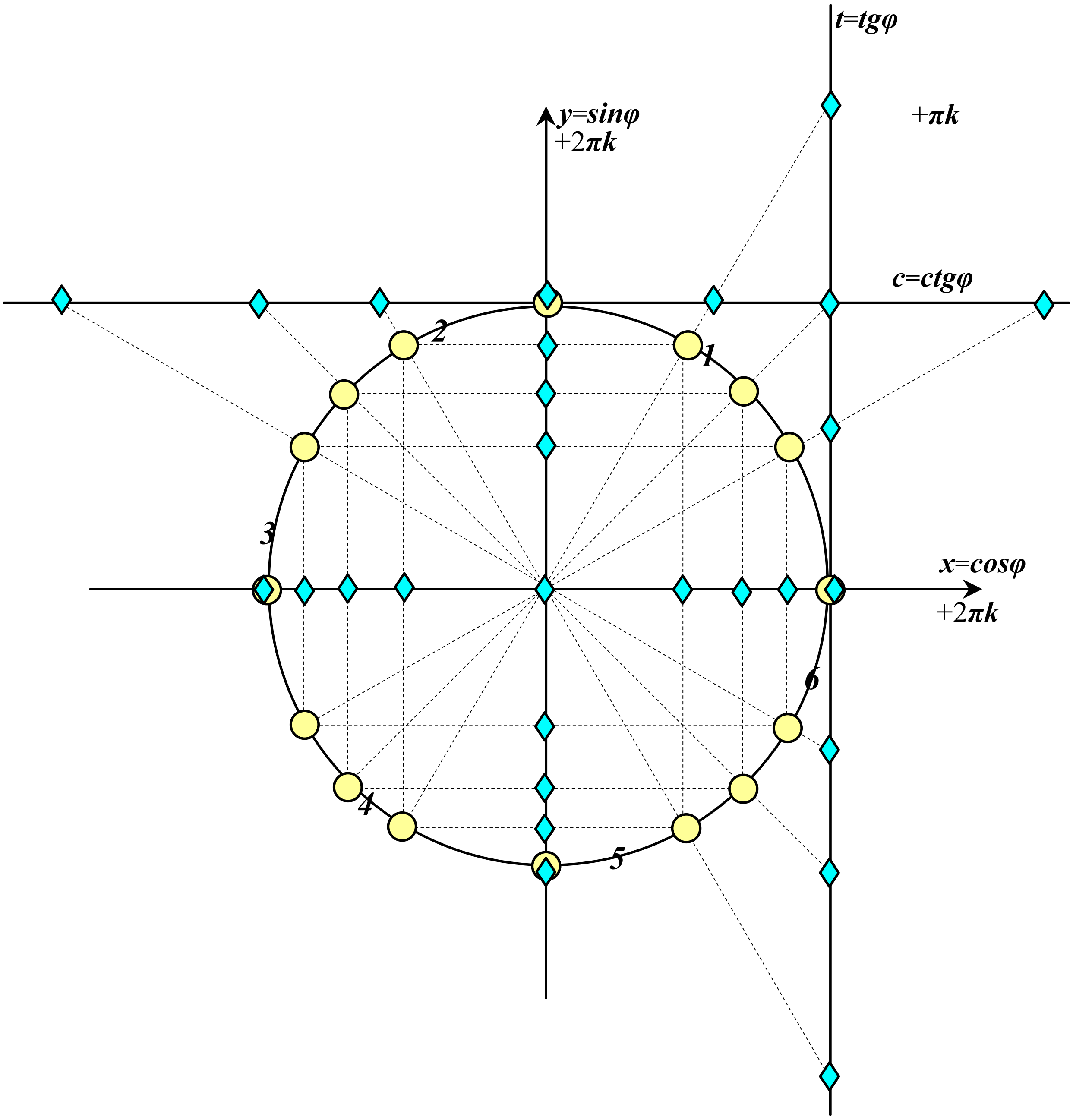
Праверыць, як надзейна вы запомнілі трыганаметрычную акружыну, можна з дапамогай трэнажора на наступнай старонцы. Зялёнымі ромбікамі там паказаны асноўныя значэнні трыганаметрычных функцый, жоўтымі кружочкамі – асноўныя пункты акружыны, па якіх вы пазней будзеце знаходзіць значэнні адваротных трыганаметрычных функцый (аркфункцый). Скапіруйце гэты малюнак (не абавязкова ў колеры) і падпішыце гэтыя значэнні, потым параўнайце з малюнкам 16. Калі атрымалася больш за дзве памылкі, то трэба праз некаторы час паўтарыць гэты кантрольны эксперымент. Памылкі ж у першай чвэрці акружыны ўвогуле недапушчальныя.



$t = tg\,\varphi$
$\sqrt{3}$
$y = \sin\varphi$
$-\sqrt{3}$
-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
0
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$
1
$\sqrt{3}$
$c = ctg\,\varphi$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
π
-1
$x = \cos\varphi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{6}$
$-\sqrt{3}$

Малюнак 16

Трэнажор “Трыганаметрычнае кола”



– ***асноўныя пункты акружыны*** *(назавіце ці падпішыце іх спачатку ў дадатным кірунку ад нулявога пункта, затым – у адмоўным; параўнайце атрыманае з малюнкам 16)*

– ***асноўныя пункты ліній сінусаў, косінусаў, тангенсаў і катангенсаў*** *(назавіце ці падпішыце іх; параўнайце атрыманае з малюнкам 16)*

Лічбы на акружыне паказваюць цэлыя радыяны на першым перыядзе.

II-7. Графікі трыганаметрычных функцый

Цяпер, калі вы ўжо ўмееце вылічваць сінусы і косінусы любых лікаў і ведаеце некаторыя ўласцівасці гэтых функцый, можна паспрабаваць уявіць, як выглядаюць іх графікі (малюнкі 17-20).

Разглядаючы гэтыя графікі (цікава разглядаць іх усе разам у параўнанні), можна паўтарыць ужо вядомыя ўласцівасці**.**

Функцыя $y = \sin x$.

Абсяг вызначэння (мноства значэнняў, якія можа прымаць аргумент x): $(-\infty; +\infty)$.

Абсяг значэнняў (мноства значэнняў, якія можа прымаць функцыя y): $[-1; 1]$.

Нулі функцыі: $y = 0$, калі $x = \pi k$, дзе $k \in Z$.

Прамежкі знаканязменнасці: $y > 0$, калі $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$;

$y < 0$, калі $x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$, дзе $k \in Z$.

Прамежкі манатоннасці: функцыя нарастае, калі $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$; функцыя спадае, калі $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in Z$.

Найменшае значэнне $y = -1$ функцыя прымае, калі $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, дзе $k \in Z$;

найбольшае значэнне $y = 1$ функцыя прымае, калі $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, дзе $k \in Z$.

Функцыя перыядычная, найменшы дадатны перыяд $T = 2\pi$.

Функцыя няцотная, бо пры сіметрычным адносна нуля абсягу вызначэння супрацьлеглым значэнням аргумента адпавядаюць супрацьлеглыя значэнні функцыі: $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$ (графік функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат).

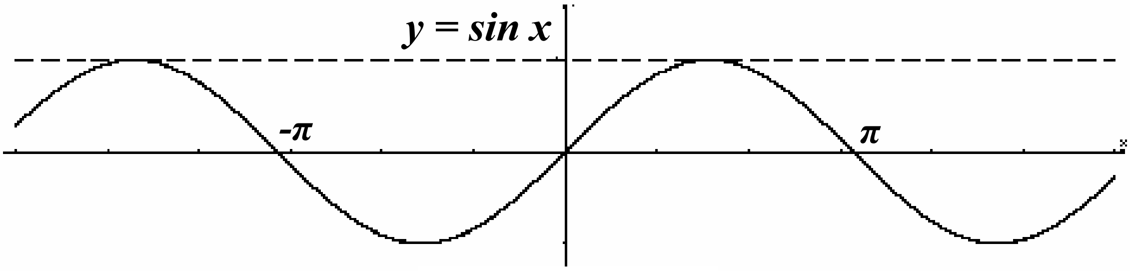
Графік функцыі $y = \sin x$ называецца ***сінусоідай***.

Функцыя $y = \cos x$.

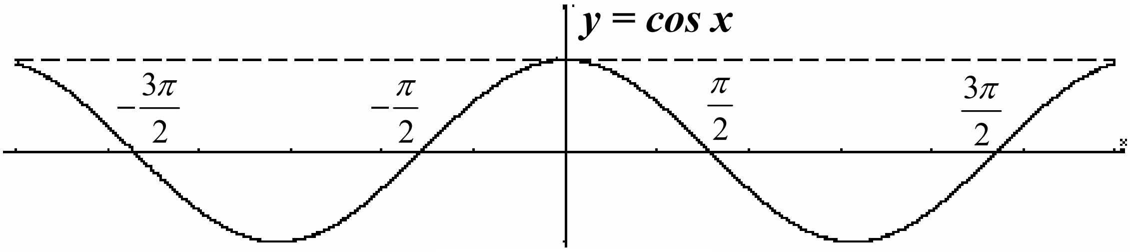
Абсяг вызначэння (мноства значэнняў, якія можа прымаць аргумент x): $(-\infty; +\infty)$.

Абсяг значэнняў (мноства значэнняў, якія можа прымаць функцыя y): $[-1; 1]$.

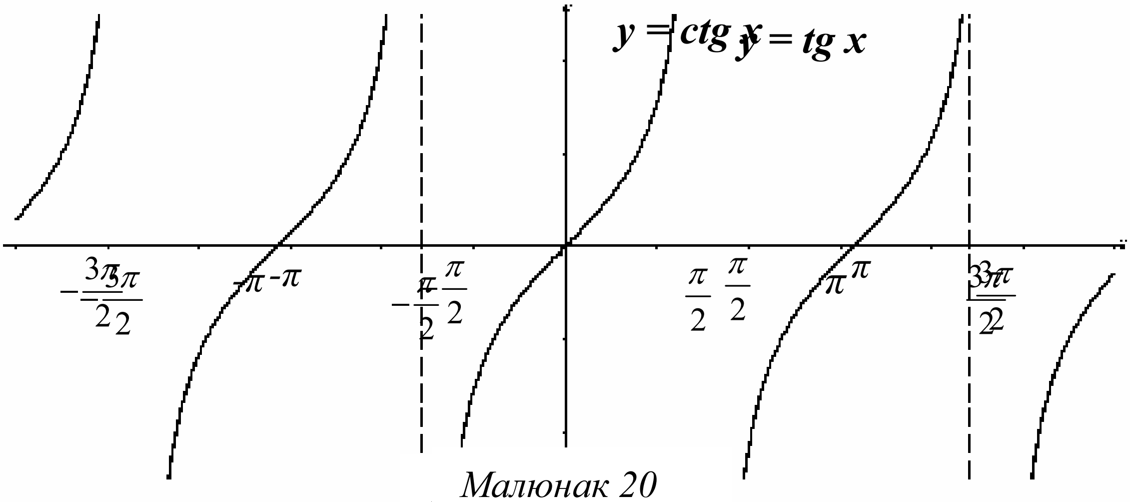
Нулі функцыі: $y = 0$, калі $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, дзе $k \in Z$.



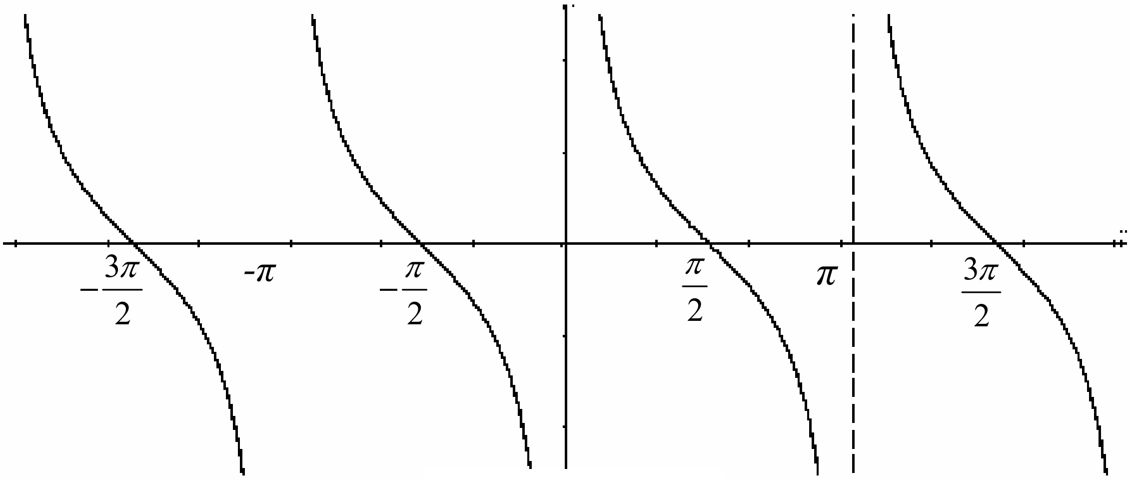
Малюнак 17



Малюнак 18



Малюнак 20



Малюнак 20

Прамежкі знаканязменнасці: $y > 0$, калі $x \in (-\frac{\pi}{2} 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, дзе $k \in Z$; $y < 0$, калі $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, дзе $k \in Z$.

Прамежкі манатоннасці: функцыя нарастае, калі $x \in [-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$, дзе $k \in Z$; функцыя спадае, калі $x \in [2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, дзе $k \in Z$.

Найменшае значэнне $y = -1$ функцыя прымае, калі $x = \pi + 2\pi k$, дзе $k \in Z$;

найбольшае значэнне $y = 1$ функцыя прымае, калі $x = 2\pi k$, дзе $k \in Z$.

Функцыя перыядычная, найменшы дадатны перыяд $T = 2\pi$.

Функцыя цотная, бо пры сіметрычным адносна нуля абсягу вызначэння супрацьлеглым значэнням аргумента адпавядаюць роўныя значэнні функцыі: $cos\ (-\varphi) = cos\ \varphi$ (графік функцыі сіметрычны адносна восі ардынат).

Графік функцыі $y = cos\ x$ – пасунутая на $-\frac{\pi}{2}$ ***сінусоіда***.

Функцыя $\boldsymbol{y = tg\ x}$.

Абсяг вызначэння (мноства значэнняў, якія можа прымаць аргумент x): $(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$, дзе $k \in Z$.

Абсяг значэнняў (мноства значэнняў, якія можа прымаць функцыя y): $(-\infty;\ +\infty)$.

Нулі функцыі: $y = 0$, калі $x = \pi k$, дзе $k \in Z$.

Прамежкі знаканязменнасці: $y > 0$, калі $x \in (\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$, дзе $k \in Z$; $y < 0$, калі $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k)$, дзе $k \in Z$.

Прамежкі манатоннасці: функцыя нарастае, калі $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$, дзе $k \in Z$; прамежкаў спадання няма.

Найменшага і найбольшага значэнняў функцыя не мае.

Функцыя перыядычная, найменшы дадатны перыяд $T = \pi$.

Функцыя няцотная, бо пры сіметрычным адносна нуля абсягу вызначэння супрацьлеглым значэнням аргумента адпавядаюць супрацьлеглыя значэнні функцыі: $tg\ (-\varphi) = -tg\ \varphi$ (графік функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат).

Графік функцыі $y = tg\ x$ называюць ***тангенсоідай***.

Функцыя $y = ctg\ x$.

Абсяг вызначэння (мноства значэнняў, якія можа прымаць аргумент x): $(\pi k;\ \pi+\pi k)$, дзе $k \in Z$.

Абсяг значэнняў (мноства значэнняў, якія можа прымаць функцыя y): $(-\infty;\ +\infty)$.

Нулі функцыі: $y = 0$, калі $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, дзе $k \in Z$.

Прамежкі знаканязменнасці: $y > 0$, калі $x \in (\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k)$, дзе $k \in Z$; $y < 0$, калі $x \in (-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi k)$, дзе $k \in Z$.

Прамежкі манатоннасці: функцыя спадае, калі $x \in (\pi k;\ \pi+\pi k)$, дзе $k \in Z$; прамежкаў нарастання няма.

Найменшага і найбольшага значэнняў функцыя не мае.

Функцыя перыядычная, найменшы дадатны перыяд $T = \pi$.

Функцыя няцотная, бо пры сіметрычным адносна нуля абсягу вызначэння супрацьлеглым значэнням аргумента адпавядаюць супрацьлеглыя значэнні функцыі: $ctg\ (-\varphi) = -ctg\ \varphi$ (графік функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат).

Графік функцыі $y = ctg\ x$ – пасунутая і перавернутая ***тангенсоіда***.

III-1. Аркфункцыі (адваротныя трыганаметрычныя функцыі)

У першым класе вас вучылі складваць лікі: 2 + 7 = 9. А калі крыху навучылі складваць, вам пачалі прапаноўваць адваротныя задачы: □ + 7 = 9 (да якога ліку трэба дадаць 7, каб атрымаўся лік 9?) ці 2 + □ = 9 (які лік трэба дадаць да ліку 2, каб атрымаўся лік 9?). Квадрацікі потым сталі замяняць літарамі. Як вынік развязвання такіх раўнанняў з'явілася адыманне – аперацыя, адваротная складанню.

Пазней вас вучылі узводзіць лікі ў квадрат: $(-7)^2 = 49$. Пасля чаго пачалі прапаноўваць адваротныя задачы: $x^2 = 49$ (які лік трэба ўзвесці ў квадрат, каб атрымаўся лік 49?). Такіх лікаў два: 7 і –7. Але матэматычныя аперацыі павінны быць адназначнымі. Таму на аперацыю, адваротную ўзвядзенню ў квадрат (якую потым пачалі называць здабываннем квадратнага кораня і абазначаць знакам $\sqrt{\ }$), увялі абмежаванні: квадратны корань з ліку павінен быць неадмоўным.

Такім чынам, $\sqrt{49} = 7$, хаця раўнанне $x^2 = 49$ мае два корані $x = \pm 7$.

Цяпер мы навучыліся разлічваць трыганаметрычныя функцыі. Знаходжанне сінуса (косінуса, тангенса, катангенса) нейкага ліку можна разглядаць як матэматычную аперацыю, для якой павінна існаваць адваротная аперацыя. Адваротную аперацыю называюць гэтак жа з прыстаўкай *арк-* (арксінус, арккосінус, арктангенс, арккатангенс).

Не забудзем аднак: адваротная аперацыя таксама павінна быць адназначнай, гэта значыць, для кожнага ліку з пэўнага лікавага абсягу вы павінны назваць адзіны адпаведны лік.

III-2. Арксінус ліку

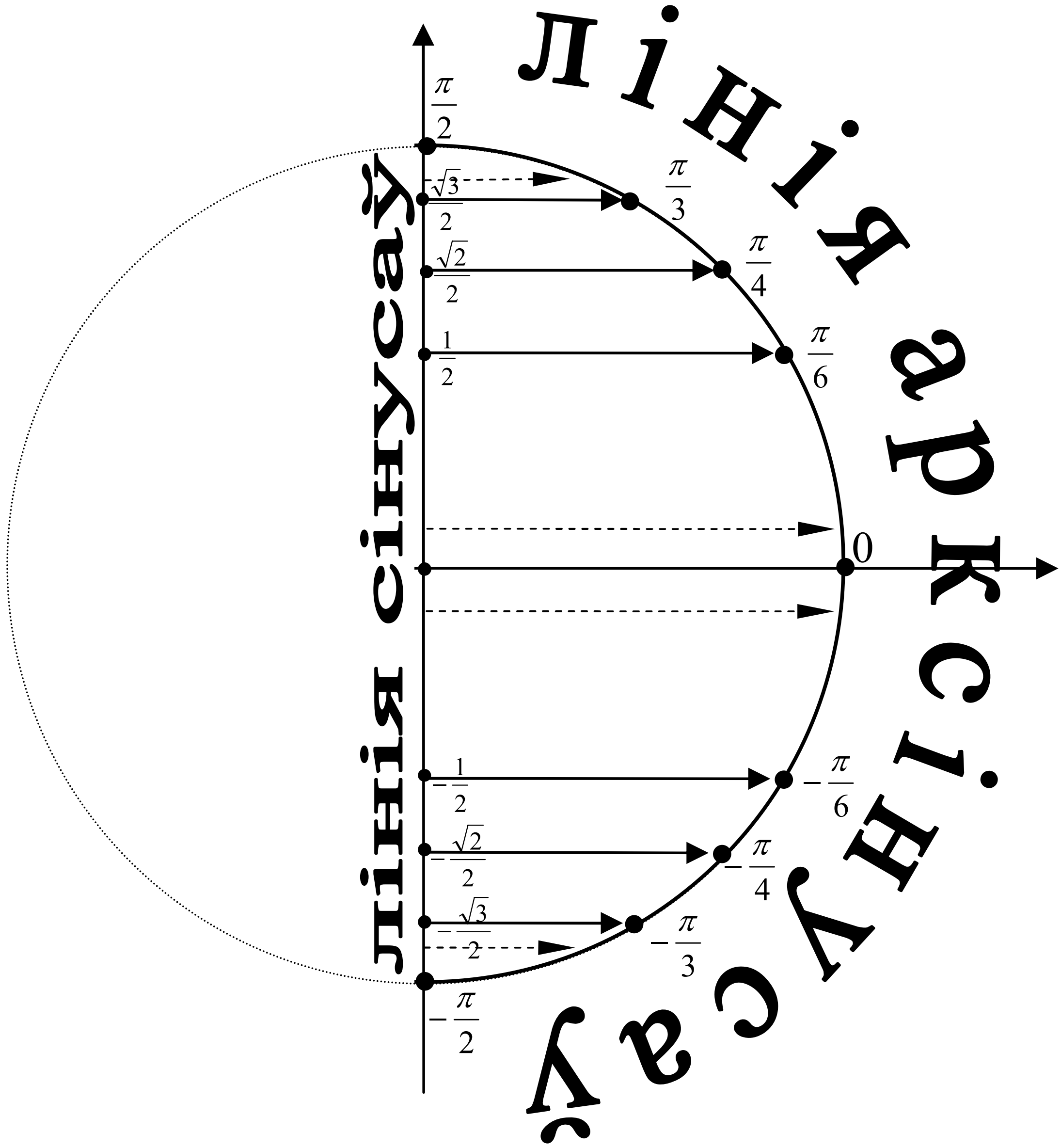
Адваротная задача для знаходжання сінуса ліку будзе выглядаць, напрыклад, так: $sin\square = 0,5$ (або $sin\ x = 0,5$ – сінус якога ліку роўны 0,5?). Але такіх лікаў шмат. Адзін з іх: $\frac{\pi}{6}$, другі: $\frac{5\pi}{6}$, трэці: $-\frac{7\pi}{6}$ ... Увогуле на акружыне ёсць два пункты, сінусы якіх роўны 0,5. Каардынаты аднаго з гэтых пунктаў запісваюцца формулай: $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; другога: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, дзе $n \in Z$. Каб зрабіць адваротную аперацыю адназначнай, трэба ўвесці нейкія абмежаванні. Як вынік дамовы паміж матэматыкамі, арксінус ліку сталі браць з прамежку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ – правая дуга трыганаметрычнай акружыны (сам той лук, на які нацягнута цеціва – лінія сінусаў). Такім чынам, арксінус ліку не можа быць роўны 2 ці – 15, хаця сінус ад гэтах лікаў бярэцца, бо гэтыя лікі не ўваходзяць у пазначаны прамежак.

У той жа час ёсць абмежаванні і на лік, ад якога вылічваецца арксінус. Паколькі сінус ліку можа прымаць значэнні з прамежку [–1; 1], то арксінус можна браць толькі ад лікаў з гэтага прамежку.

Абагульнім сказанае азначэннем:

Арксінусам ліку *m*, узятага з прамежку [–1; 1], называюць лік φ, узяты з прамежку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, калі сінус ліку φ роўны m.

У абазначэннях гэта выглядае так: $\boldsymbol{arcsin\ m = \varphi \Leftrightarrow sin\ \varphi = m}$.



Малюнак 21

Патрэніруемся ў вылічэннях арксінусаў (аглядвайцеся на мал. 21).

$arcsin\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, таму што $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ і $sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$arcsin\ (-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, таму што $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ і $sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$;

$arcsin\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ (абгрунтаванне тое ж);

$arcsin\ (-\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\dfrac{\pi}{4}$;

$arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$;

$arcsin\ (-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\dfrac{\pi}{3}$;

$arcsin\ 1 = \dfrac{\pi}{2}$

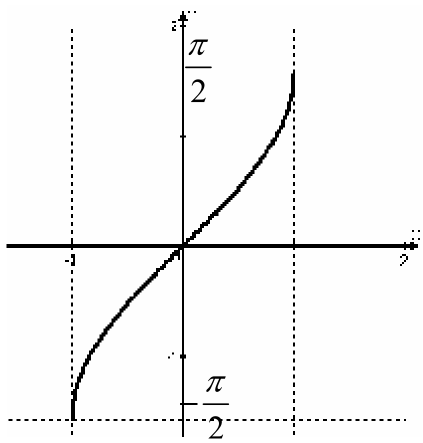
$arcsin\ (-1) = -\dfrac{\pi}{2}$;

$arcsin\ 0 = 0$.

Арксінусы іншых лікаў могуць знаходзіцца прыбліжана. Напрыклад, няхай трэба знайсці *arcsin* 0,9. На лініі сінусаў (вось ардынат) знаходзім лік 0,9 і, правёўшы праз гэты пункт перпендыкуляр да лініі сінусаў (на малюнку пункцірам), атрымаем адказ на **правай** дузе акружыны: *arcsin* 0,9 ≈ 1,2 (мал. 2 1). Аналагічна знойдзем: *arcsin* 0,1 ≈ 0,1. Увогуле для вельмі маленькіх лікаў α (скажам, для лікаў, па модулі меншых за 0,1) $arcsin\ \alpha \approx \alpha$, бо каардынаты адпаведных пунктаў на акружыне і на лініі сінусаў амаль не адрозніваюцца.

Arcsin (–0,9) ≈ –1,2; *arcsin* (–0,1) ≈ –0,1 (пункцірныя стрэлкі на мал. 21).

Графік функцыі $y = arcsin\ x$ паказаны на малюнку 22.



Малюнак 22

З аглядкай на гэты графік пералічым уласцівасці функцыі
y* = *arcsin x.

Абсяг вызначэння (мноства значэнняў, якія можа прымаць аргумент x): $[-1; 1]$.

Абсяг значэнняў (мноства значэнняў, якія можа прымаць функцыя y): $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Нулі функцыі: $y = 0$, калі $x = 0$.

Прамежкі знаканязменнасці: $y > 0$, калі $x \in (0; 1]$;

$y < 0$, калі $x \in [-1; 0)$.

Прамежкі манатоннасці: функцыя нарастае на ўсім абсягу вызначэння.

Найменшае значэнне $y = -\frac{\pi}{2}$ функцыя прымае, калі $x = -1$;

найбольшае значэнне $y = \frac{\pi}{2}$ функцыя прымае, калі $x = 1$.

Функцыя неперыядычная.

Функцыя няцотная, бо пры сіметрычным адносна нуля абсягу вызначэння супрацьлеглым значэнням аргумента адпавядаюць супрацьлеглыя значэнні функцыі: $arcsin\,(-\varphi) = -arcsin\,\varphi$ (графік функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат).

III-3. Арккосінус ліку

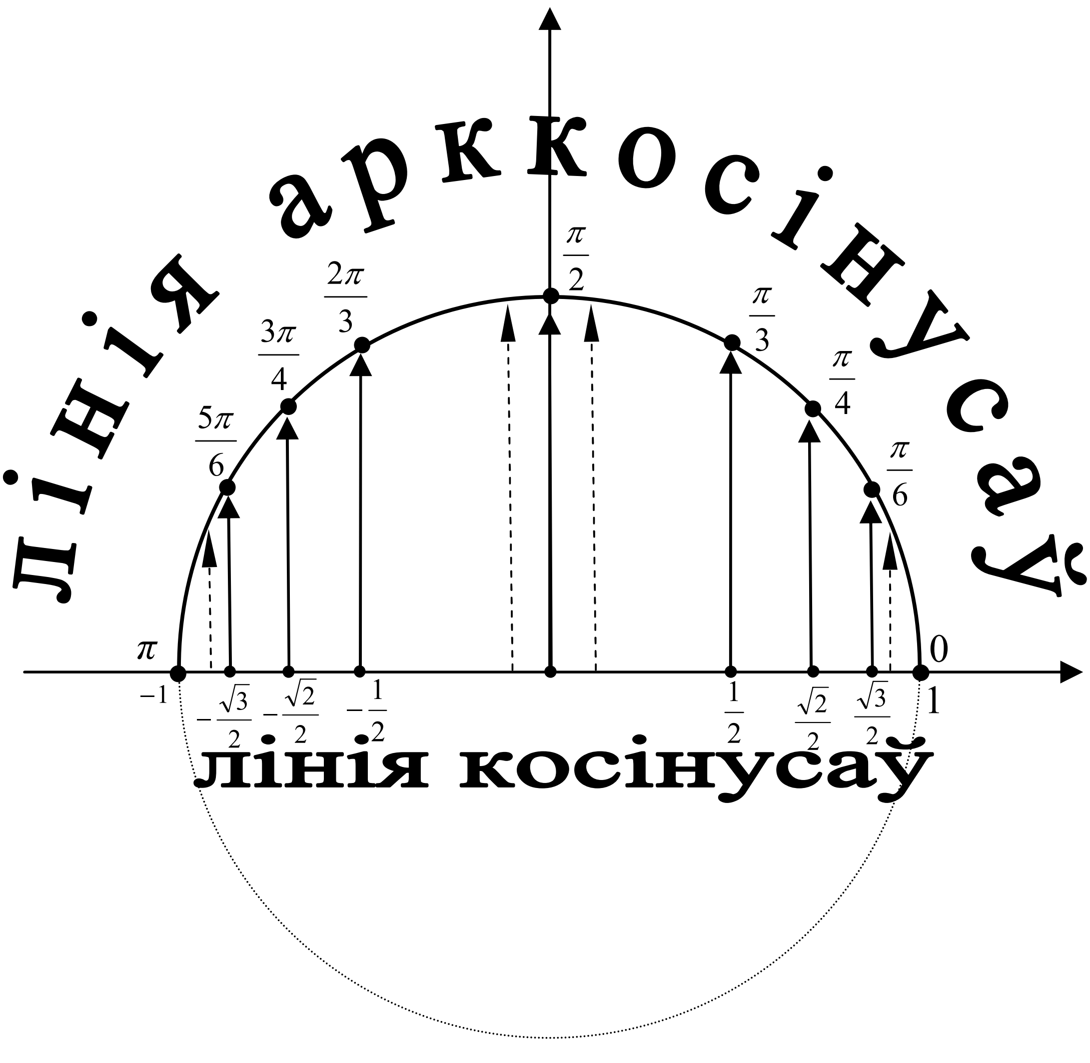
Адваротная задача для знаходжання косінуса ліку будзе выглядаць, напрыклад, так: cos□$= -0{,}5$ (або $cos\;x = -0{,}5$ – косінус якога ліку роўны –0,5?). Але такіх лікаў шмат. Адзін з іх: $\frac{2\pi}{3}$, другі: $\frac{4\pi}{3}$, трэці: $-\frac{2\pi}{3}$... Увогуле на акружыне ёсць два пункты, косінусы якіх роўны –0,5. Каардынаты аднаго з гэтых пунктаў запісваюцца формулай: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; другога: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, дзе $n \in Z$. Каб зрабіць адваротную аперацыю адназначнай, трэба ўвесці нейкія абмежаванні. Як вынік дамовы паміж матэматыкамі, арккосінус ліку сталі браць з прамежку $[0; \pi]$. Такім чынам, арккосінус ліку не можа быць роўны –0,2 ці 7, хаця косінус ад гэтах лікаў бярэцца, бо гэтыя лікі не ўваходзяць у пазначаны прамежак.

У той жа час ёсць абмежаванні і на лік, ад якога вылічваецца арккосінус. Паколькі косінус ліку можа прымаць значэнні з прамежку [–1; 1], то арккосінус можна браць толькі ад лікаў з гэтага прамежку.

Абагульнім сказанае азначэннем:

Арккосінусам ліку *m*, узятага з прамежку [–1; 1], называюць лік φ, узяты з прамежку $[0; \pi]$, калі косінус ліку φ роўны m.

У абазначэннях гэта выглядае так: $\boldsymbol{arccos\, m = \varphi \Leftrightarrow cos\, \varphi = m}$.



Малюнак 23

Патрэніруемся ў вылічэннях арккосінусаў (аглядвайцеся на мал. 23).

$arccos\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, таму што $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ і $cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$arccos\ (-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, таму што $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$ і $cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

$arccos\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ (абгрунтаванне тое ж);

$arccos\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$;

$arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$;

$arccos\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$;

$arccos$ 1 = 0

$arccos$ (–1) = π;

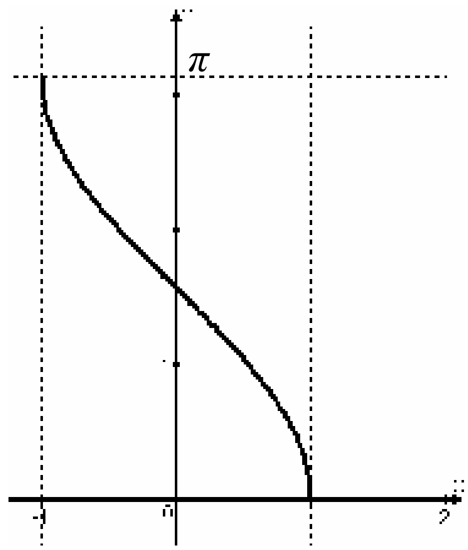
$arccos$ 0 = $\frac{\pi}{2}$.

Арккосінусы іншых лікаў могуць знаходзіцца прыбліжана. Напрыклад, няхай трэба знайсці *arccos* 0,9. На лініі косінусаў (вось абсцыс) знаходзім лік 0,9 і, правёўшы праз гэты пункт перпендыкуляр да лініі косінусаў, атрымаем адказ на **верхняй** дузе акружыны: *arccos* 0,9 ≈ 0,4 (прыблізнае знаходжанне арккосінусаў паказана пункцірнымі стрэлкамі на мал. 23). Аналагічна знойдзем: *arccos* 0,1 ≈ 1,5.

arccos (–0,9) ≈ 2,7 (π – *arccos* 0,9 – чаму так? – прыгледзьцеся і асэнсуйце);

arccos (–0,1) ≈ 1,7 (дакладней так: ≈ π – *arccos* 0,1) (мал. 23).

Графік функцыі $y = arccos\ x$ паказаны на малюнку 24.



Малюнак 24

З аглядкай на гэты графік пералічым уласцівасці функцыі ***y = arccos x***.

Абсяг вызначэння (мноства значэнняў, якія можа прымаць аргумент x): $[-1; 1]$.

Абсяг значэнняў (мноства значэнняў, якія можа прымаць функцыя y): $[0; \pi]$.

Нулі функцыі: $y = 0$, калі $x = 1$.

Прамежкі знаканязменнасці: $y > 0$, калі $x \in [-1; 1)$;

$y < 0$ не бывае.

Прамежкі манатоннасці: функцыя спадае на ўсім абсягу вызначэння.

Найменшае значэнне $y = 0$ функцыя прымае, калі $x = 1$;

найбольшае значэнне $y = \pi$ функцыя прымае, калі $x = -1$.

Функцыя неперыядычная.

Функцыя не мае цотнасці, бо змена знака аргумента выклікае змену модуля значэння функцыіі: $arccos\,(-\varphi) \neq arccos\,\varphi$ і $arccos\,(-\varphi) \neq -arccos\,\varphi$ (графік такой функцыі не сіметрычны адносна пачатку каардынат і не сіметрычны адносна восі ардынат).

III-4. Арктангенс ліку

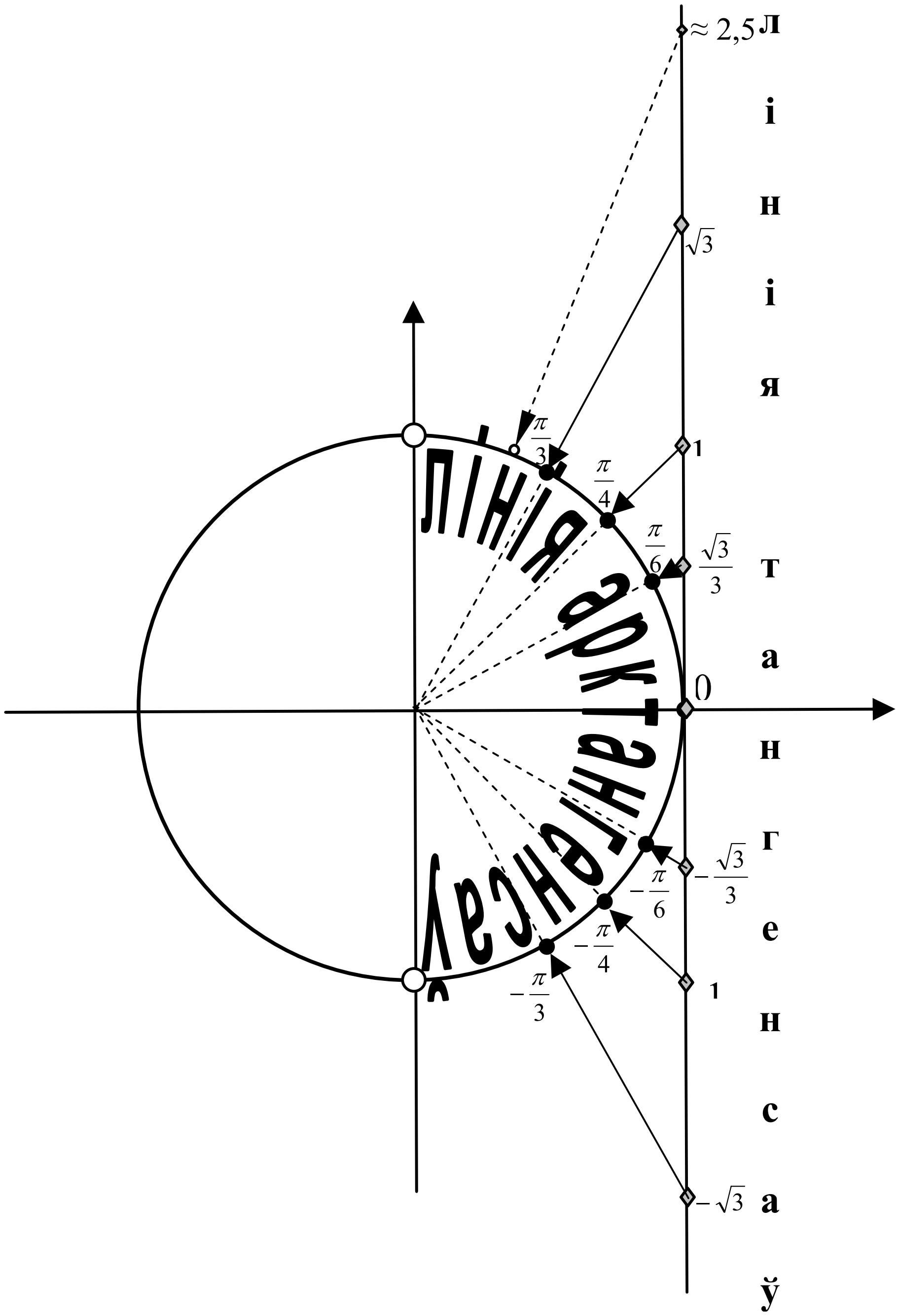
Адваротная задача для знаходжання тангенса ліку будзе выглядаць, напрыклад, так: $tg\square = \sqrt{3}$ (або $tg\,x = \sqrt{3}$ – тангенс якога ліку роўны $\sqrt{3}$?). Але такіх лікаў шмат. Адзін з іх: $\frac{\pi}{3}$, другі: $\frac{4\pi}{3}$, трэці: $-\frac{2\pi}{3}$... Увогуле на акружыне ёсць два пункты, тангенсы якіх роўны $\sqrt{3}$. Каардынаты гэтых пунктаў запісваюцца формулай: $\frac{\pi}{3}+\pi n$; дзе $n \in Z$. Каб зрабіць адваротную аперацыю адназначнай, трэба ўвесці нейкія абмежаванні. Як вынік дамовы паміж матэматыкамі, арктангенс ліку сталі браць з прамежку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ – правая дуга трыганаметрычнай акружыны (сам той лук, які страляе ў лінію тангенсаў) без канцовых яе пунктаў. Такім чынам, арктангенс ліку не можа быць роўны 2 ці –15, хаця тангенс ад гэтах лікаў бярэцца, бо гэтыя лікі не ўваходзяць у пазначаны прамежак.

У той жа час абмежаванняў на лік, ад якога вылічваецца арктангенс, няма, бо тангенс ліку (у адрозненне ад сінуса ці косінуса ліку) можа прымаць любыя значэнні.

Абагульнім сказанае азначэннем:

Арктангенсам любога ліку *m* называюць лік φ, узяты з прамежку $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, калі тангенс ліку φ роўны m.

У абазначэннях гэта выглядае так: ***arctg m = φ*** $\Leftrightarrow$ ***tg φ = m***.



Малюнак 25

Патрэніруемся ў вылічэннях арктангенсаў (аглядвайцеся на мал. 25).

$arctg\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, таму што $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ і $tg\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

$arctg\ (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, таму што $-\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ і $tg\ (-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$;

$arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$ (абгрунтаванне тое ж);

$arctg\ (-1) = -\frac{\pi}{4}$;

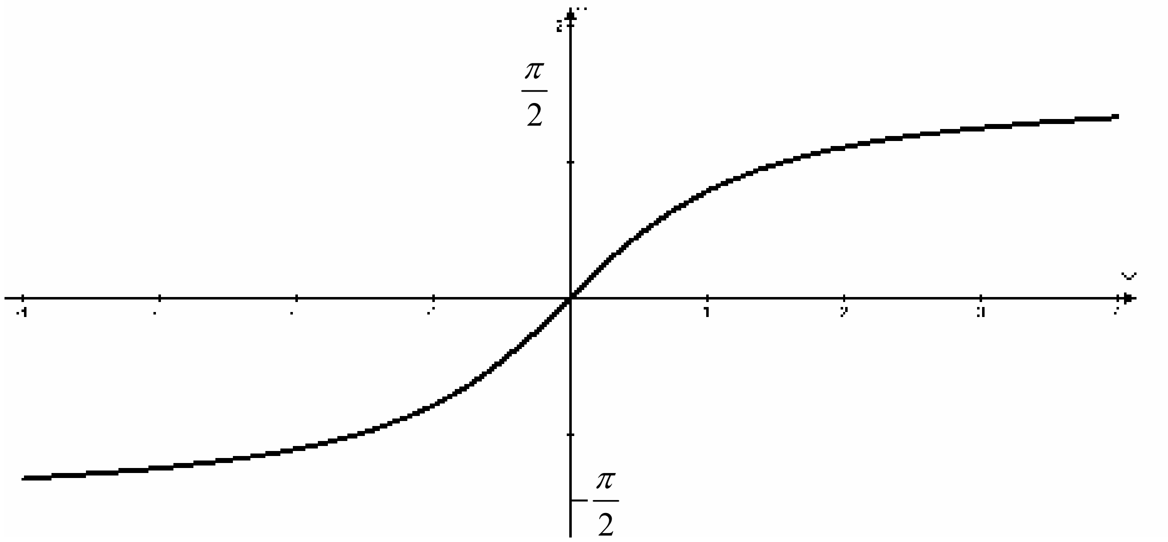
$arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$;

$arctg\ (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$;

$arctg\ 0 = 0$.

Арктангенсы іншых лікаў могуць знаходзіцца прыбліжана. Напрыклад, няхай трэба знайсці *arctg* 2,5. На лініі тангенсаў знаходзім лік 2,5 і, правёўшы праз гэты пункт і цэнтр акружыны прамую, атрымаем адказ на **правай** дузе акружыны: *arctg* 2,5 ≈ 1,2 (пункцірная стрэлка на мал. 25). Няцяжка здагадацца, што *arctg* (–2,5) ≈ –1,2.

Графік функцыі $y = arctg\ x$ паказаны на малюнку 26.



Малюнак 26

З аглядкай на гэты графік пералічым уласцівасці функцыі $\boldsymbol{y = arctg\, x}$.

Абсяг вызначэння (мноства значэнняў, якія можа прымаць аргумент x): $(-\infty; +\infty)$.

Абсяг значэнняў (мноства значэнняў, якія можа прымаць функцыя y): $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Нулі функцыі: $y = 0$, калі $x = 0$.

Прамежкі знаканязменнасці: $y > 0$, калі $x \in (0; +\infty)$;
$y < 0$, калі $x \in (-\infty; 0)$.

Прамежкі манатоннасці: функцыя нарастае на ўсім абсягу вызначэння.

Найменшага і найбольшага значэнняў функцыя не мае.

Функцыя неперыядычная.

Функцыя няцотная, бо пры сіметрычным адносна нуля абсягу вызначэння супрацьлеглым значэнням аргумента адпавядаюць супрацьлеглыя значэнні функцыі: $arctg\,(-\varphi) = -\,arctg\,\varphi$ (графік функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат).

ІІІ-5. Арккатангенс ліку

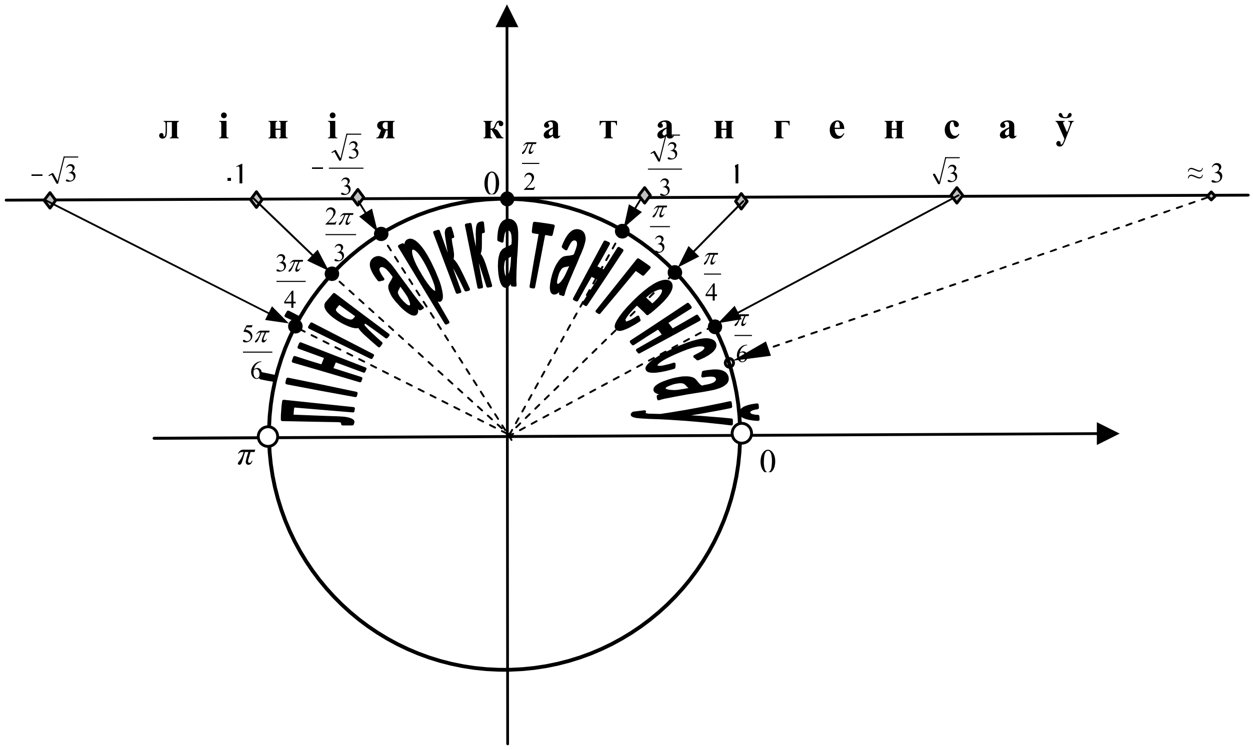
Адваротная задача для знаходжання катангенса ліку будзе выглядаць, напрыклад, так: $ctg\square = \sqrt{3}$ (або $ctg\ x = \sqrt{3}$ – катангенс якога ліку роўны $\sqrt{3}$?). Але такіх лікаў шмат. Адзін з іх: $\frac{\pi}{6}$, другі: $\frac{7\pi}{6}$, трэці: $-\frac{5\pi}{6}$... Увогуле на акружыне ёсць два пункты, катангенсы якіх роўны $\sqrt{3}$. Каардынаты гэтых пунктаў запісваюцца формулай: $\frac{\pi}{6}+\pi m$; дзе $m \in Z$. Каб зрабіць адваротную аперацыю адназначнай, трэба ўвесці нейкія абмежаванні. Як вынік дамовы паміж матэматыкамі, арккатангенс ліку сталі браць з прамежку $(0; \pi)$ – верхняя дуга трыганаметрычнай акружыны (той лук, які страляе ў лінію катангенсаў) без канцовых яе пунктаў. Такім чынам, арккатангенс ліку не можа быць роўны 4 ці –1, хаця катангенс ад гэтах лікаў бярэцца, бо гэтыя лікі не ўваходзяць у пазначаны прамежак.

У той жа час абмежаванняў на лік, ад якога вылічваецца арккатангенс, няма, бо катангенс ліку (у адрозненне ад сінуса ці косінуса ліку) можа прымаць любыя значэнні.

Абагульнім сказанае азначэннем:

Арккатангенсам любога ліку *b* называюць лік α, узяты з прамежку $(0; \pi)$, калі катангенс ліку α роўны b.

У абазначэннях гэта выглядае так: $\boldsymbol{arcctg\ b = \alpha \Leftrightarrow ctg\ \alpha = b}$.



Малюнак 27

Патрэніруемся ў вылічэннях арккатангенсаў (аглядвайцеся на мал. 27).

$arcctg\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, таму што $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $ctg\ \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$;

$arcctg\ (-\sqrt{3}\,) = \frac{5\pi}{6}$, таму што $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $ctg\ \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$;

$arcctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$ (абгрунтаванне тое ж);

$arcctg\ (-1) = \frac{3\pi}{4}$;

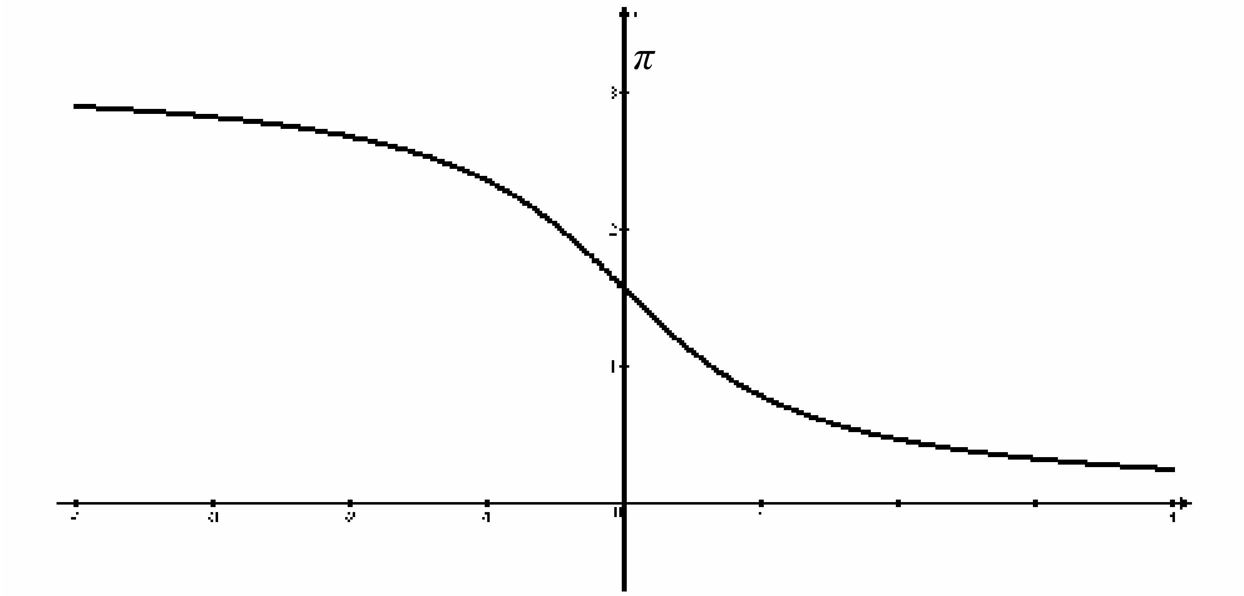
$arcctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$;

$arcctg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\pi}{3}$;

$arcctg\,0 = \frac{\pi}{2}$.

Арккатангенсы іншых лікаў могуць знаходзіцца прыбліжана. Напрыклад, няхай трэба знайсці *arcctg* 3. На лініі катангенсаў знаходзім лік 3 і, правёўшы праз гэты пункт і цэнтр акружыны прамую, атрымаем адказ на **верхняй** дузе акружыны: *arcctg* 3 ≈ 0,3 (пункцірная стрэлка на мал. 27). Можна здагадацца, што *arcctg* (-3) ≈ 2,8 (або так: ≈ π – 0,3) – паразважайце аб гэтым па малюнку 27.

Графік функцыі $y = arcctg\,x$ паказаны на малюнку 28.



Малюнак 28

З аглядкай на гэты графік пералічым уласцівасці функцыі ***y* = *arcctg x***.

Абсяг вызначэння (мноства значэнняў, якія можа прымаць аргумент x): $(-\infty; +\infty)$.

Абсяг значэнняў (мноства значэнняў, якія можа прымаць функцыя y): $(0; \pi)$.

Нулёў у гэтай функцыі няма.

Прамежкі знаканязменнасці: $y > 0$, калі $x \in (-\infty; +\infty)$; $y < 0$ не бывае.

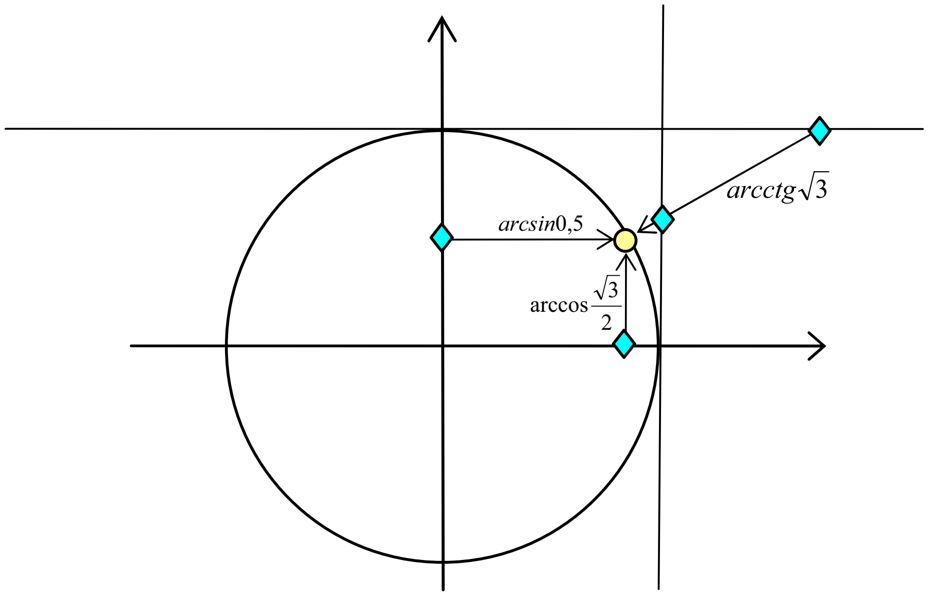
Прамежкі манатоннасці: функцыя спадае на ўсім абсягу вызначэння.

Найменшага і найбольшага значэнняў функцыя не мае.

Функцыя неперыядычная.

Функцыя не мае цотнасці, бо змена знака аргумента выклікае змену модуля значэння функцыіі: *arcctg* $(-\varphi) \neq$ *arcctg* φ і *arcctg* $(-\varphi) \neq -$ *arcctg* φ (графік такой функцыі не сіметрычны адносна пачатку каардынат і не сіметрычны адносна восі ардынат).

Цяпер вам ёсць сэнс вярнуцца да трэнажора і зноў праверыць сваё веданне трыганаметрычнай акружыны, адзначаючы асноўныя пункты акружыны праз аркфункцыі. Напрыклад, замест пункта $\frac{\pi}{6}$ вы напішаце $\arcsin\frac{1}{2}$, або $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, або $\mathrm{arcctg}\sqrt{3}$. Гэта можа выглядаць, напрыклад, так:



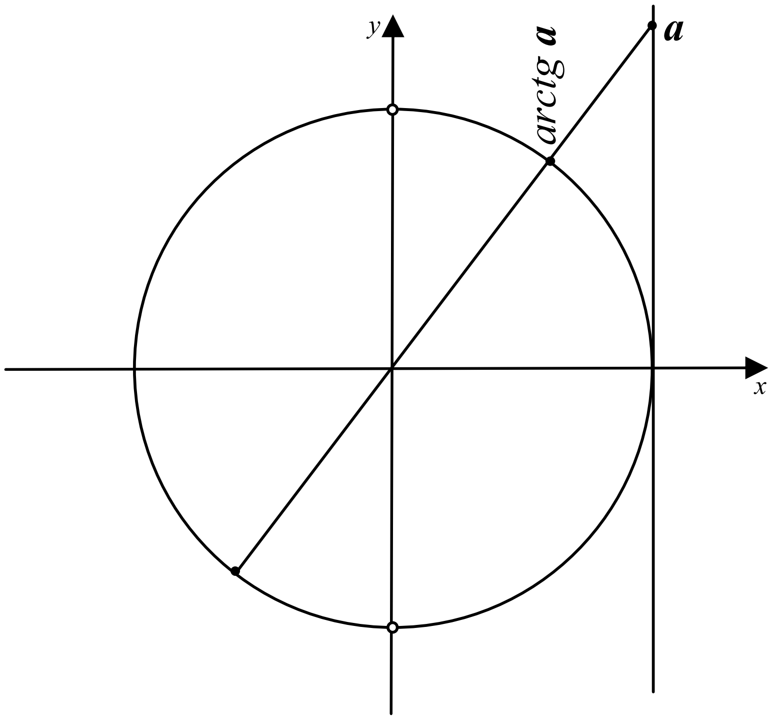
Але не кожны пункт акружыны можа быць выяўлены праз значэнні чатырох аркфункцый. Напрыклад, у другой чвэрці няма арксінусаў, а ў чацвёртай няма арккатангенсаў. Пункты трэцяй чвэрці ўвогуле не могуць быць выяўленымі праз якую-небудзь аркфункцыю. Ільготай мець чатыры выявы аркфункцый карыстаюцца толькі пункты першай чвэрці.

IV. Развязванне прасцейшых трыганаметрычных раўнанняў

Прасцейшымі трыганаметрычнымі раўнаннямі называюць раўнанні віду *sin* $x = a$, *cos* $x = a$, *tg* $x = a$, *ctg* $x = a$, дзе a – нейкі лік. Развязваць іх будзем з апорай на трыганаметрычную акружыну або на графікі адпаведных функцый.

Раўнаннем ***tg x = a*** фіксуецца пытанне: тангенс якога ліку роўны ліку a?

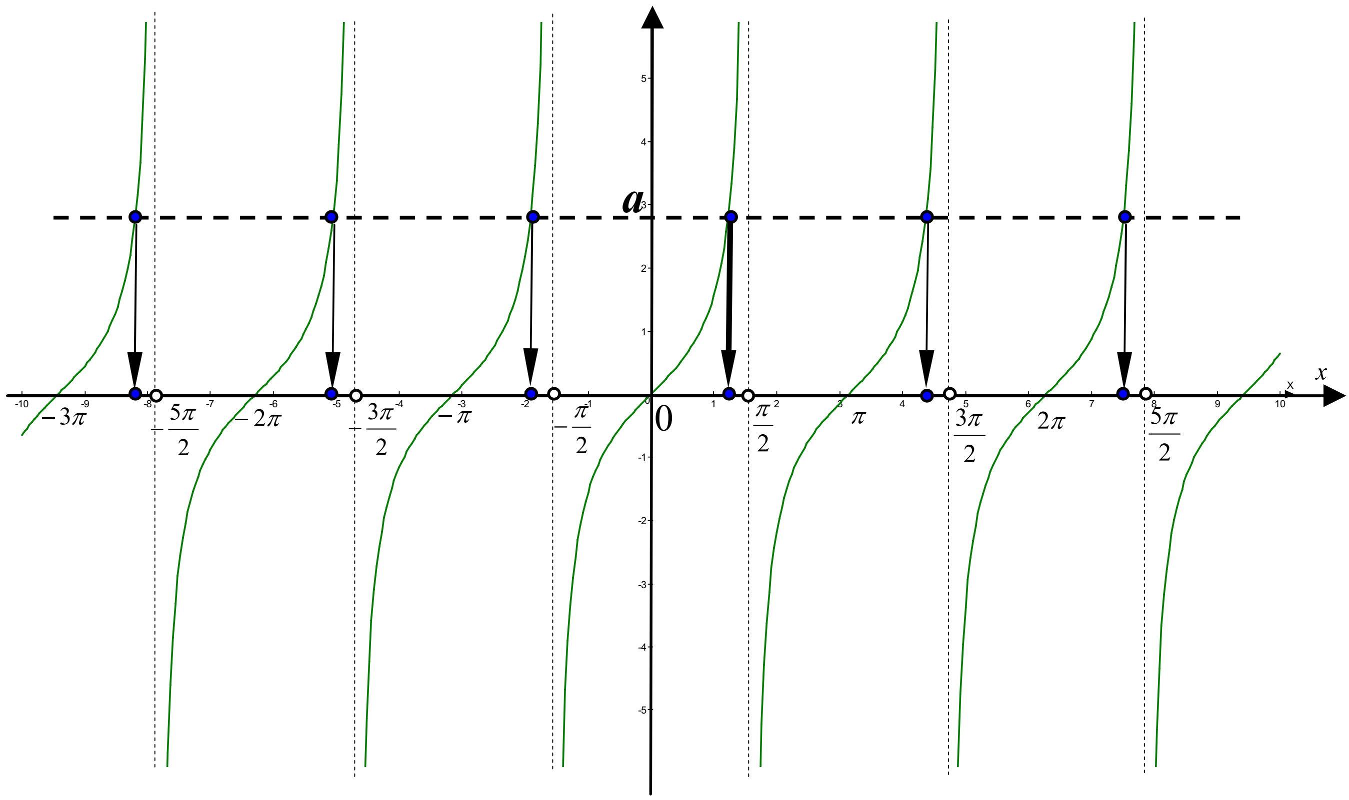
Для адказу на гэтае пытанне знойдзем на лініі тангенсаў пункт a і правядзем праз гэты пункт і цэнтр акружыны прамую (мал. 29). Такая прамая заўсёды перасячэ акружыну ў двух дыяметральна супрацьлеглых пунктах. Адзін з гэтых пунктаў будзе на правай палове акружыны (лініі арктангенсаў) і таму адна з яго каардынат на акружыне роўна *arctg a*. Каардынаты ж абодвух гэтых пунктаў запісваюцца формулай *arctg* $a + \pi n$, дзе $n \in \mathrm{Z}$ (нагадаем, што лік π – перыяд тангенса).



Малюнак 29

Калі разважаць аб тым жа з апорай на графікі, то ў плоскай сістэме каардынат трэба пабудаваць графікі дзвюх функцый $y = tg\ x$ і $y = a$. Графік першай – вядомая ўжо вам тангенсоіда, графік другой – яшчэ больш вядомая прамая, паралельная восі абсцыс, якая перасякае вось ардынат у пункце a (мал. 30).

$y = tgx$



Малюнак 30

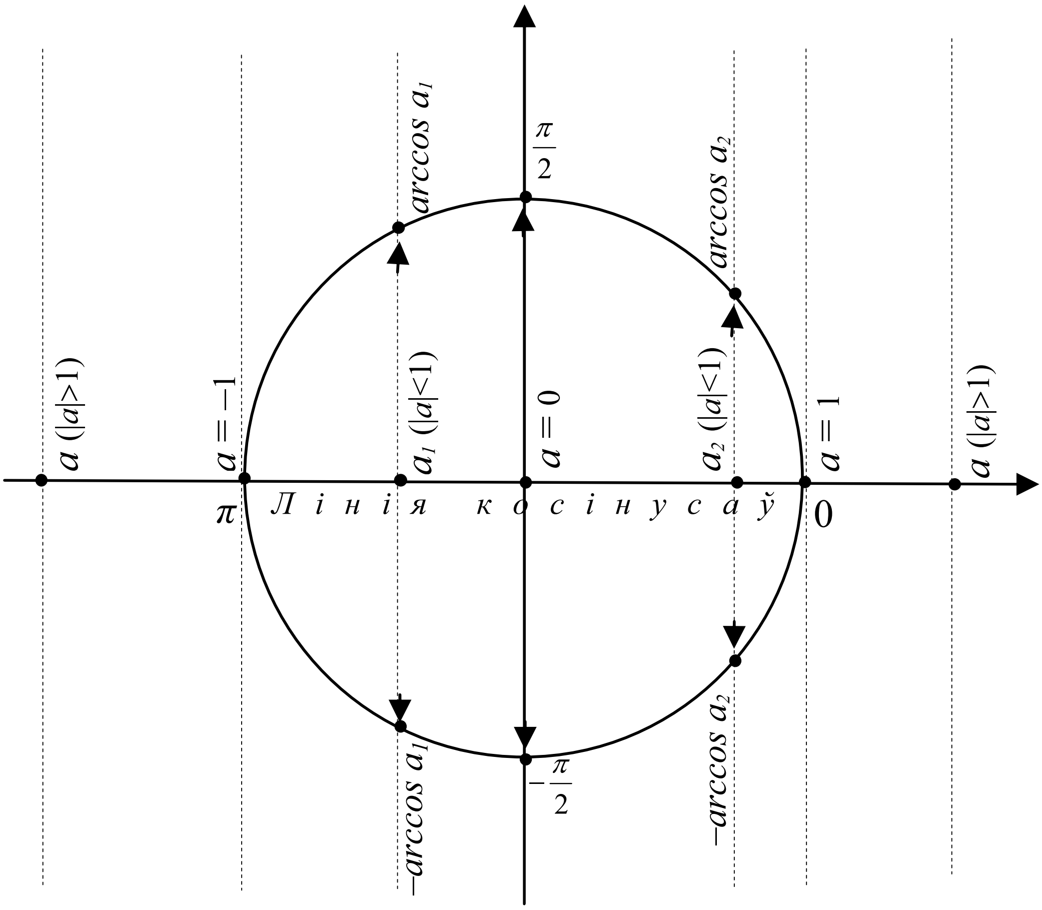
Гэтыя графікі пры любым a будуць мець бясконцую колькасць пунктаў перасячэння, абсцысы якіх (паказаныя стрэлачкамі) і з'яўляюцца каранямі раўнання. Пункт на прамежку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, паказаны тлустай стрэлкай, гэта $arctg\ a$. Астатнія пункты аддалены ад суседніх на π (перыяд тангенса). Такім чынам, усе корані раўнання $tg\ x = a$ можна запісаць формулай $x = arctg\ a + \pi k$, дзе $k \in Z$.

Аналагічна разважаючы з апорай на трыганаметрычную акружыну ці на графіку, можна атрымаць развязак раўнання $\boldsymbol{ctg\ x = a}$: $x = arcctg\ a + \pi k$, дзе $k \in Z$.

З сінусам і косінусам крыху складаней.

Няхай трэба развязаць раўнанне $\boldsymbol{cos\ x = a}$. Няцяжка здагадацца, што калі $a > 1$ ці $a < -1$, то раўнанне развязкаў не мае (часта гавораць так: калі $|a| > 1$, то раўнанне развязкаў не мае).

Разважаем далей, аглядваючыся на малюнак 31.



Малюнак 31

Калі $a = 1$, то раўнанне становіцца такім: $\boldsymbol{\cos x} = 1$. На акружыне ёсць толькі адзін пункт, косінус якога роўны 1. Гэта пачатковы пункт акружыны. Усе яго каардынаты на акружыне запісваюцца формулай $2\pi m$, дзе $m \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\cos x = 1$ мае корані $x = 2\pi m$, дзе $m \in Z$.

Калі $a = -1$, то раўнанне становіцца такім: $\boldsymbol{\cos x} = -1$. На акружыне ёсць толькі адзін пункт, косінус якога роўны –1. Усе яго каардынаты на акружыне запісваюцца формулай $\pi + 2\pi m$, дзе $m \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\cos x = -1$ мае корані $x = \pi + 2\pi m$, дзе $m \in Z$.

Калі $a = 0$, то раўнанне становіцца такім: $\boldsymbol{\cos x} = 0$. На акружыне ёсць два пункты, косінусы якіх роўны 0 (верхні і ніжні пункты акружыны). Усе іх каардынаты на акружыне запісваюцца формулай

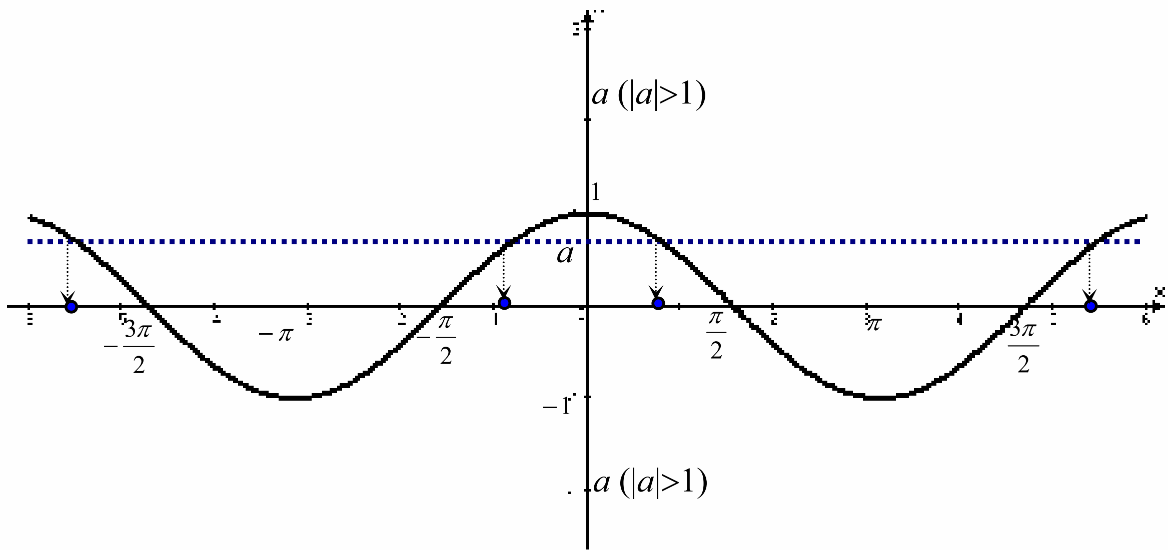
$\frac{\pi}{2} + \pi m$, дзе $m \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\cos x = 0$ мае корані $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, дзе $m \in Z$.

Калі ж a – любы іншы лік, але па модулю меншы за адзінку, то адзначыўшы гэты пункт на лініі косінусаў (на малюнку 31 паказаны два такія пункты – з адмоўным a_1 і дадатным a_2) і правёўшы праз яго перпендыкуляр да лініі косінусаў, атрымаем на акружыне два пункты – адзін на верхняй дузе (на лініі арккосінусаў), другі – на ніжняй дузе (на лініі мінус арккосінусаў, умоўна так яе можна назваць). Усе каардынаты "верхняга" пункта запісваюцца формулай: $\arccos a + 2\pi m$, "ніжняга": $-\arccos a + 2\pi m$.

Такім чынам, раўнанне $\boldsymbol{\cos x = a}$ дзе $|a| \le 1$, мае корані $\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2\pi m}$, дзе $m \in Z$. Па гэтай формуле можна развязваць і тыя прыватныя выпадкі раўнанняў, якія разгледжаны асобна (для $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$), але там без формулы атрымоўваецца прасцей.

На графіках усё гэта выглядае так (мал.32).



Малюнак 32

Графікі функцый $y = \cos x$ (сінусоіда) і $y = a$ (пункцірныя прамыя для розных a) не будуць перасякацца, калі $|a| > 1$, і раўнанне $\cos x = a$ не мае кораняў у гэтым выпадку.

Калі $a = 1$, то пункцірная прамая датыкаецца да сінусоіды ў яе найвышэйшых пунктах і абсцысы пунктаў дотыку будуць каранямі раўнання. Усе гэтыя абсцысы запісваюцца формулай $x = 2\pi n$, дзе $n \in Z$.

Калі $a = -1$, то пункцірная прамая датыкаецца да сінусоіды ў яе найніжэйшых пунктах і абсцысы пунктаў дотыку будуць каранямі раўнання. Яны запісваюцца формулай $x = \pi + 2\pi n$, дзе $n \in Z$.

Калі a = 0, то пункцірная прамая пройдзе па восі абсцыс і перасячэ сінусоіду ў пункце $\frac{\pi}{2}$ і далей праз прамежкі даўжынёй π. Абсцысы пунктаў перасячэння ў гэтым выпадку запісваюцца формулай $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, дзе $n \in Z$. Гэта і ёсць развязак раўнання $\cos x = 0$.

Калі $|a| < 1$, то пункцірная прамая (глядзіце на самую тлустую пункцірную прамую) з сінусоідай $y = \cos x$ мае бясконцую колькасць пунктаў перасячэння, па два такіх пункты на кожным прамежку даўжынёй 2π (перыяд косінуса). Абсцысы такіх пунктаў паказаны стрэлкамі. Пункт, атрыманы на прамежку $[0; \pi]$, – гэта $\arccos a$, а на прамежку $[-\pi; 0]$ – гэта $-\arccos a$. Астатнія пункты адрозніваюцца ад гэтых на цэлую колькасць перыядаў косінуса ($2\pi n$). Таму развязак раўнання запішацца формулай $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, дзе $n \in Z$.

(*Нехта лепш зразумее праз акружыну, нехта – праз графікі, але лепш, калі зразумееце і тое, і другое. Таму, калі засталося нейкае неразуменне, то перачытайце тэкст яшчэ раз і ўгледзьцеся ў адпаведны малюнак.*)

Засталося разабрацца з раўнаннем ***sin x = a***.

Няцяжка зразумець, што і тут пры $|a| > 1$ раўнанне не мае кораняў, бо $|\sin x| \le 1$.Гэты выпадак мы цяпер не будзем паказваць ні на акружыне, ні на графіках.

Калі $a = 1$, то раўнанне становіцца такім: ***sin x*** = 1. На акружыне (мал. 33) ёсць толькі адзін пункт, сінус якога роўны 1. Гэта пункт, адна з каардынат якога $\frac{\pi}{2}$. А ўсе яго каардынаты на акружыне запісваюцца формулай $\frac{\pi}{2}+2\pi m$, дзе $m \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\sin x = 1$ мае корані $x = \frac{\pi}{2}+2\pi m$, дзе $m \in Z$.

Калі $a = -1$, то раўнанне становіцца такім: ***sin x*** = –1. На акружыне ёсць толькі адзін пункт, сінус якога роўны –1. Усе яго каардынаты на акружыне запісваюцца формулай $-\frac{\pi}{2}+2\pi m$, дзе $m \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\sin x = -1$ мае корані $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi m$, дзе $m \in Z$.

Калі $a = 0$, то раўнанне становіцца такім: ***sin x*** = 0. На акружыне ёсць два пункты, сінусы якіх роўны 0 (“правы” і “левы” пункты акружыны). Усе іх каардынаты на акружыне запісваюцца формулай πm, дзе $m \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\sin x = 0$ мае корані $x = \pi m$, дзе $m \in Z$.

Калі ж a – любы іншы лік, але па модулю меншы за адзінку, то, адзначыўшы гэты пункт на лініі сінусаў (на малюнку 33 паказаны два такія пункты – з дадатным a_1 і адмоўным a_2) і правёўшы праз яго перпендыкуляр да лініі сінусаў, атрымаем на акружыне два пункты – адзін на правай дузе (на лініі арксінусаў), другі – на левай дузе. Усе каардынаты "правага" пункта запісваюцца формулай: $\arcsin a + 2\pi m$, "левага": $\pi - \arcsin a + 2\pi m$. Апошняе давайце зразумеем лепш. Чаму "$+ 2\pi m$" – гэта зразумела, ужо помнім, што 2π – перыяд сінуса. А чаму $\pi - \arcsin a$? Справа ў тым, што дугі паміж паралельнымі хордамі аднолькавыя.Таму дугі AC і BD роўныя, дугі AE і BF таксама роўныя. Але дуга BD (мера якой $\arcsin a$) адкладзена ад нуля ў дадатным кірунку ($0 + \arcsin a$), а дуга AC з той жа мерай (бо роўная дузе BD) адкладзена ад π у адмоўным кірунку. Таму пункт C мае на акружыне каардынату $\pi - \arcsin a_1$.

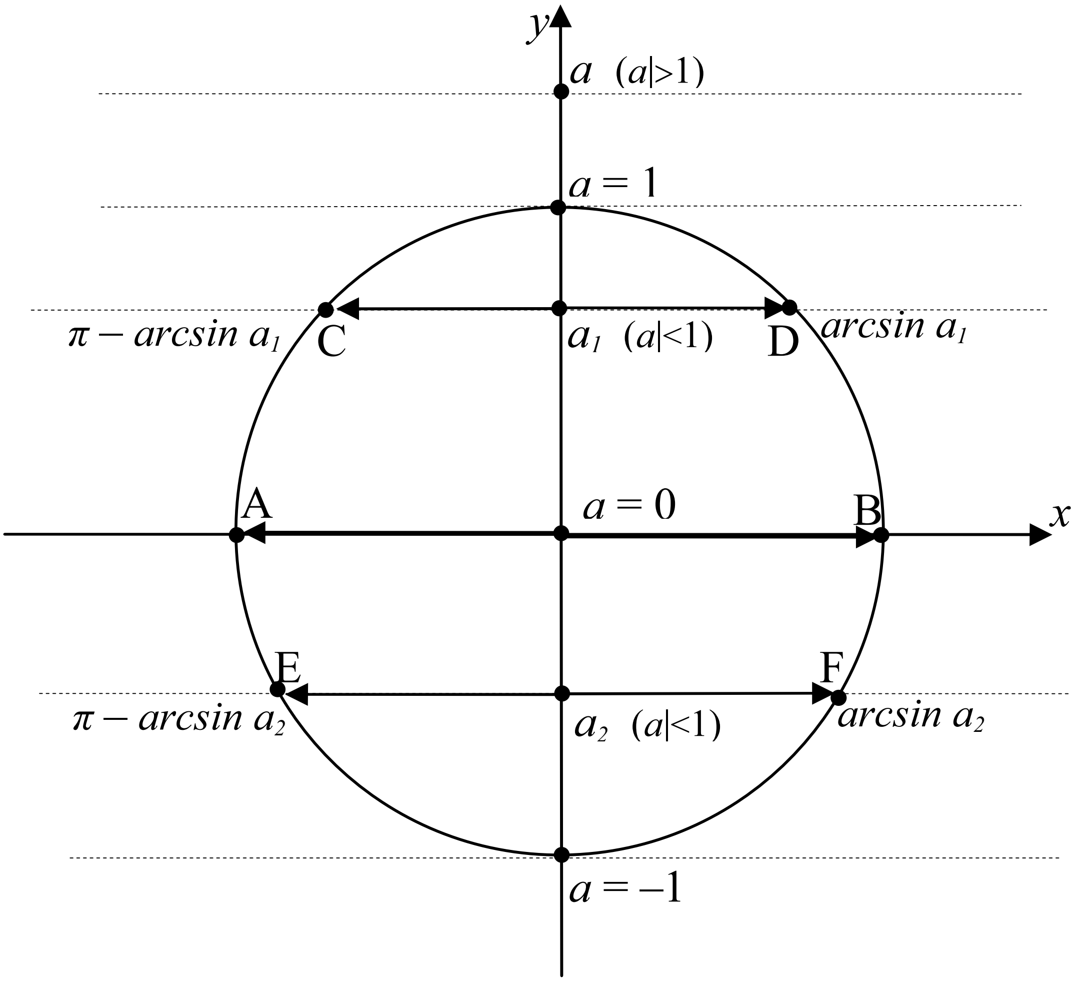
У другім выпадку дуга BF адкладзена ад нуля ў адмоўным кірунку, таму пункт F мае **адмоўную** каардынату $\arcsin a_2$. А дуга AE адкладзена ад π у дадатным кірунку, таму пункт E мае на акружыне каардынату $\pi - \arcsin a_2$ (аднімаецца адмоўны лік!). Такім чынам, у любым выпадку пункты акружыны з роўнымі сінусамі a маюць каардынаты $\arcsin a$ і $\pi - \arcsin a$.

Таму раўнанне $\sin x = a$ пры $|a| \le 1$ мае корані $x = \arcsin a + 2\pi m$ і $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$, дзе m, n – любыя цэлыя лікі ($m, n \in Z$).

Так можна было б і пакінуць гэты развязак у дзвюх формулах, але матэматыкі – народ эканамічны, яны прыдумалі як гэтыя дзве роўнасці замяніць адной. Калі крыху пераўтварыць апошнюю роўнасць ($x = \pi - \arcsin a + 2\pi n = -\arcsin a + (2n+1)\pi$) і параўнаць яе з першай ($x = \arcsin a + 2m\pi$), то можна заўважыць, што яны адрозніваюцца цотнасцю множнікаў перад π ($2n+1$ – няцотны лік, а $2m$ - цотны) і знакам перад арксінусам. У выніку дзве атрыманыя роўнасці можна замяніць адной:

$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, дзе $k \in Z$ (пры цотным k атрымаецца першая роўнасць, бо цотная ступень мінус адзінкі роўна адзінцы, а пры няцотным k – другая роўнасць, бо няцотная ступень мінус адзінкі роўна мінус адзінцы). Гэтай формулай і запісваюцца ўсе корані раўнання $\boldsymbol{\sin x = a}$ для $|a| \le 1$.

Па гэтай формуле можна развязваць і тыя прыватныя выпадкі раўнанняў, якія разгледжаны асобна (для $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$), але там без формулы атрымоўваецца прасцей.

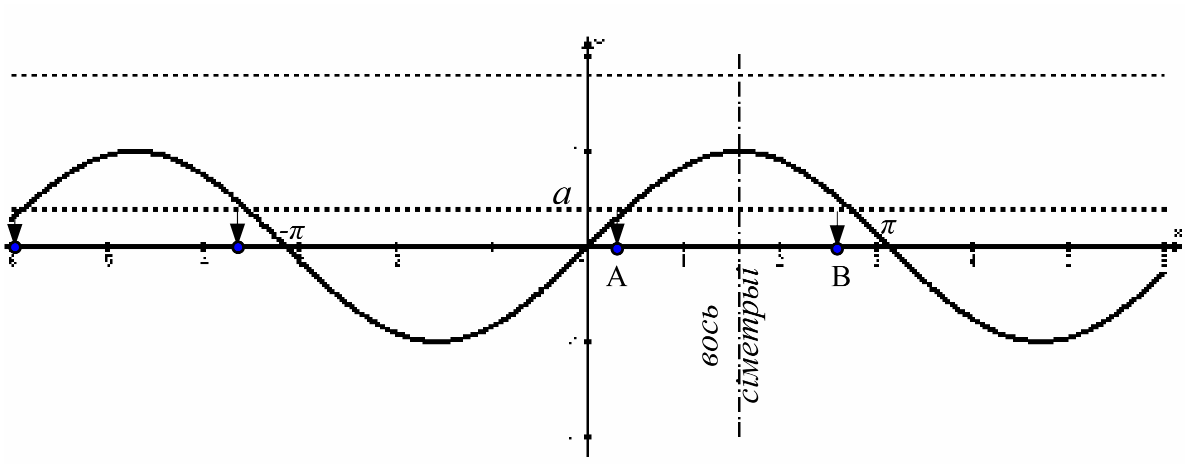


Малюнак 33

Графічны падыход да развязвання раўнання ***sin x = a*** паказаны на малюнку 34.

У адной сістэме каардынат пабудаваны графікі функцый $y = \sin x$ (сінусоіда) і $y = a$ (пункцірныя прамыя для розных a). Калі $a = 1$, то прамая датыкаецца да сінусоіды ў яе верхніх пунктах з адлегласцю 2π паміж суседнімі. Абсцысы гэтых пунктаў: $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, дзе $k \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\sin x = 1$ мае корані $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, дзе $k \in Z$.



Малюнак 34

Калі $a = -1$, то прамая датыкаецца да сінусоіды ў яе ніжніх пунктах з адлегласцю 2π паміж суседнімі. Абсцысы гэтых пунктаў: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, дзе $k \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\sin x = -1$ мае корані $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, дзе $k \in Z$.

Калі $a = 0$, то прамая праходзіць па восі абсцыс і перасякае сінусоіду ў пунктах, адлегласць паміж якімі роўна π. Адзін з гэтых пунктаў мае абсцысу 0, таму абсцысы ўсіх гэтых пунктаў запішуцца формулай $0 + \pi k$, дзе $k \in Z$.

Такім чынам, раўнанне $\sin x = 0$ мае корані $x = \pi k$, дзе $k \in Z$.

Нарэшце калі a – любы іншы лік, па модулю меншы за адзінку (зважай на самую тлустую пункцірную прамую), то прамая перасякае сінусоіду шмат разоў (па два пункты перасячэння на кожным прамежку даўжынёй 2π; 2π – перыяд сінуса). Абсцысы пунктаў перасячэння паказаны стрэлачкамі. Пункт перасячэння на прамежку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (пункт А) мае абсцысу, роўную $\arcsin a$. Паспрабуем разабрацца з абсцысай пункта В. Вертыкальная прамая, якая праходзіць праз пункт $\frac{\pi}{2}$, з’яўляецца воссю сіметрыі сінусоіды. Пункт В сіметрычны пункту А адносна гэтай прамой, а 0 сіметрычны пункту π. Сіметрычныя адрэзкі роўныя, таму адрэзак восі абсцыс ад В да π роўны адрэзку ад нуля да А, даўжыня якога $\arcsin a$. Такім чынам, абсцыса пункта В роўна $\pi - \arcsin a$.

Абсцысы двух пунктаў такім чынам высветлены, абсцысы ж астатніх пунктаў перасячэння адрозніваюцца ад гэтых на 2π (перыяд сінуса)

Такім чынам, раўнанне $\boldsymbol{\sin x = a}$, дзе $|a| \le 1$, мае корані $x = \arcsin a + 2\pi k$ або $x = \pi - \arcsin a + 2\pi t$, дзе $k, t \in Z$. Як з гэтых дзвюх роўнасцяў "вылепіць" адну, – глядзіце вышэй.

Атрымалі, што раўнанне $\boldsymbol{\sin x = a}$, дзе $|a| \le 1$, мае корані $\boldsymbol{x = (-1)^m \arcsin a + \pi m}$, дзе $m \in Z$.

Падвядзем высновы. Вось усе прасцейшыя трыганаметрычныя раўнанні і іх развязкі:

$\boldsymbol{tg\, x = a}$ (a –любы лік) $\rightarrow$ $\boldsymbol{x = arctg\, a + \pi k}$, $k \in Z$;
$\boldsymbol{ctg\, x = a}$ (a –любы лік) $\rightarrow$ $\boldsymbol{x = arcctg\, a + \pi k}$, $k \in Z$;
$\boldsymbol{\cos x = a}$ ($|a| \le 1$) $\rightarrow$ $\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2\pi k}$, $k \in Z$;
$\boldsymbol{\sin x = a}$ ($|a| \le 1$) $\rightarrow$ $\boldsymbol{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k}$, $k \in Z$;

Развязваць іншыя раўнанні вам прыдзецца звядзеннем іх да прасцейшых пры дапамозе формул трыганаметрыі. Таму зараз мы пераходзім да формул.

V-1. Формулы сувязі паміж трыганаметрычнымі функцыямі аднаго аргумента

Гэтая група формул утрымлівае толькі 6 формул, дзве з якіх вы ўжо ведаеце, гэта азначэнні тангенса і катангенса:

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \textbf{(1)}; \qquad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x} \; \textbf{(2)}.$$

З іх вынікае, што $tg\, x \cdot ctg\, x = 1$ **(3)**.

Далей узгадаем, што трыганаметрычная акружына мае раўнанне $x^2 + y^2 = 1$. Паколькі цяпер $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, то раўнанне акружыны прыме выгляд $\boldsymbol{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1}$ **(4)**.

Роўнасць 4, справядлівую для любых φ, называюць **асноўнай трыганаметрычнай тоеснасцю**, а выраз $\sin^2 z + \cos^2 z$ часта называюць **трыганаметрычнай адзінкай**.

Лёгка даказваецца тэарэма, адваротная асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці: **Калі сума квадратаў двух лікаў *m* і *n* роўная 1, то існуе такі лік φ, што $m = cos\ \varphi$, $n = sin\ \varphi$.**

Сапраўды, калі $m^2 + n^2 = 1$, то пункт з каардынатамі (m; n) ляжыць на акружыне радыуса 1 з цэнтрам (0; 0), гэта значыць на трыганаметрычнай акружыне і на гэтай акружыне ён мае нейкую каардынату φ. І тады па азначэнні сінуса і косінуса ліку $m = cos\ \varphi$, $n = sin\ \varphi$. *(Заўвага: паколькі пры складанні можна мяняць месцамі складнікі, то не мае значэння, які з лікаў m ці n вы назавеце сінусам ліку, істотна каб другі лік стаў косінусам **таго самага ліку**.)*

Але вернемся да роўнасці 4. Калі левую і правую часткі гэтай роўнасці падзяліць на $cos^2\ \varphi$, то атрымаем:

$$tg^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi} \quad \mathbf{(5)}.$$

Калі ж левую і правую часткі роўнасці 4 падзяліць на $sin^2\ \varphi$, то атрымаецца яшчэ адна формула:

$$1 + ctg^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi} \quad \mathbf{(6)}.$$

Гэтыя 6 формул складаюць першую групу трыганаметрычных формул, яны прызначаны для таго, каб, ведаючы значэнне адной з трыганаметрычных функцый для нейкага ліку φ, вылічваць значэнні іншых трыганаметрычных функцый для таго ж аргумента. Паглядзім на прыкладах, як гэта робіцца.

Прыклад 1. Няхай дадзена, што $cos\ \omega = -\frac{15}{17}$, прычым $\omega \in [\pi; 2\pi]$. Патрабуецца вылічыць $sin\ \omega$, $tg\ \omega$ і $ctg\ \omega$. Спачатку зразумеем, навошта дадзена $\omega \in [\pi; 2\pi]$. Справа ў тым, што формулы, якімі будзем карыстацца, утрымліваюць квадраты, а таму для вылічэння значэння адпаведнай функцыі прыдзецца здабываць квадратны корань і трэба будзе думаць пра знак перад коранем. Для гэтага трэба высветліць, аб якой чвэрці ідзе гаворка. [π; 2π] – гэта III і IV чвэрці. Але ў IV чвэрці косінус дадатны, а нам дадзены косінус адмоўны. Таму гаворка пра III чвэрць, дзе сінус таксама адмоўны, а тангенс і катангенс дадатныя (калі б прамежак для ω не быў названы, тады б перад квадратным коранем ставіўся б знак ±). Цяпер можна прыступіць да вылічэнняў.

З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці маем $sin\ \omega = -\sqrt{1-\cos^2\omega} = -\sqrt{1-\frac{225}{289}} = -\sqrt{\frac{64}{289}} = -\frac{8}{17}$. Далейшае проста:

$$tg\ \omega = sin\ \omega : cos\ \omega = -\frac{8}{17} : (-\frac{15}{17}) = \frac{8}{15},\ \ ctg\ \omega = \frac{1}{tg\omega} = \frac{15}{8}.$$

<u>Прыклад 2</u>. Па дадзеным значэнні катангенса ліку t ($ctg\ t = -\frac{40}{9}$) вылічыць значэнні іншых трыганаметрычных функцый гэтага ліку, калі вядома, што $t\in(5;\ 8)$. Зноў жа спачатку зразумеем, аб якой чвэрці гамонка, каб вызначыцца са знакамі функцый. Тут гэта зрабіць складаней. Але ператворым радыяны ў градусы: $5 = 5\cdot\frac{180}{\pi}\approx\frac{900}{3,14159...}\approx 286^{o}$, $8 = 8\cdot\frac{180}{\pi}\approx\frac{1440}{3,14159...}\approx 458^{o}$. Прамежак ($286^{o}$; 458^{o}) можна, адкінуўшы адну акружыну (360^{o}), замяніць на прамежак (-74^{o}; 98^{o}) – сюды ўваходзіць уся першая чвэрць, а таксама частка другой і частка чацвёртай. Першую не бярэм у разлік, бо дадзены катангенс адмоўны. Тады другая – (90^{o}; 98^{o})? Ці чацвёртая – (-74^{o} ; 0^{o})? Але на прамежку (90^{o}; 98^{o}) катангенсы большыя за мінус адзінку (азірніцеся на трыганаметрычную акружыну і пераканайцеся, што $ctg\ 135^{o} = -1$). Таму дадзены лік t знаходзіцца ў IV чвэрці, дзе сінус і тангенс адмоўныя, а косінус дадатны. Ведаючы знакі, можна вылічваць модулі.

$tg\ t = \frac{1}{ctgt} = -\frac{9}{40}$; $\frac{1}{\cos^2 t} = tg^2\ t + 1 = \frac{81}{1600} + 1 = \frac{1681}{1600}$, адсюль $cos^2\ t = \frac{1600}{1681}$, а таму $cos\ t = \frac{40}{41}$ (бо ён у IV чвэрці дадатны); цяпер $sin\ t = tg\ t\cdot cos\ t = -\frac{9}{40}\cdot\frac{40}{41} = -\frac{9}{41}$. І такім чынам заданне выканана.

<u>Прыклад 3</u>. Вылічыць $sin\ (arccos\ 1 - arctg\frac{1}{5})$.

<u>Развязак</u>. Паколькі arccos 1 = 0 і сінус – функцыя няцотная, то дадзены выраз ператворыцца так: $sin\ (arccos\ 1 - arctg\frac{1}{5}) = sin\ (0 - arctg\frac{1}{5}) = -sin\ (arctg\frac{1}{5})$. Каб рухацца далей, успомнім, што $arctg\frac{1}{5}$ – гэта лік з прамежку $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, тангенс якога роўны $\frac{1}{5}$. Абазначым гэты лік літарай x. Цяпер задача набывае звыклы (па першых двух пры-

кладах) выгляд: вылічыць $-sin\ x$, калі $tg\ x = \frac{1}{5}$ і $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ – гэта IV або I чвэрць, але па знаку тангенса вызначаем, што гэта I чвэрць і сінус будзе дадатным. Засталося правесці вылічэнні па формулах.

$$ctg\ x = \frac{1}{tgx} = 5;\ \ \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2\ x = 26,\ \text{адсюль}\ sin^2\ x = \frac{1}{26}\ \text{і}$$

$sin\ x = \frac{\sqrt{26}}{26}$. *Адказ*: $-\frac{\sqrt{26}}{26}$.

V-2. Формулы прывядзення

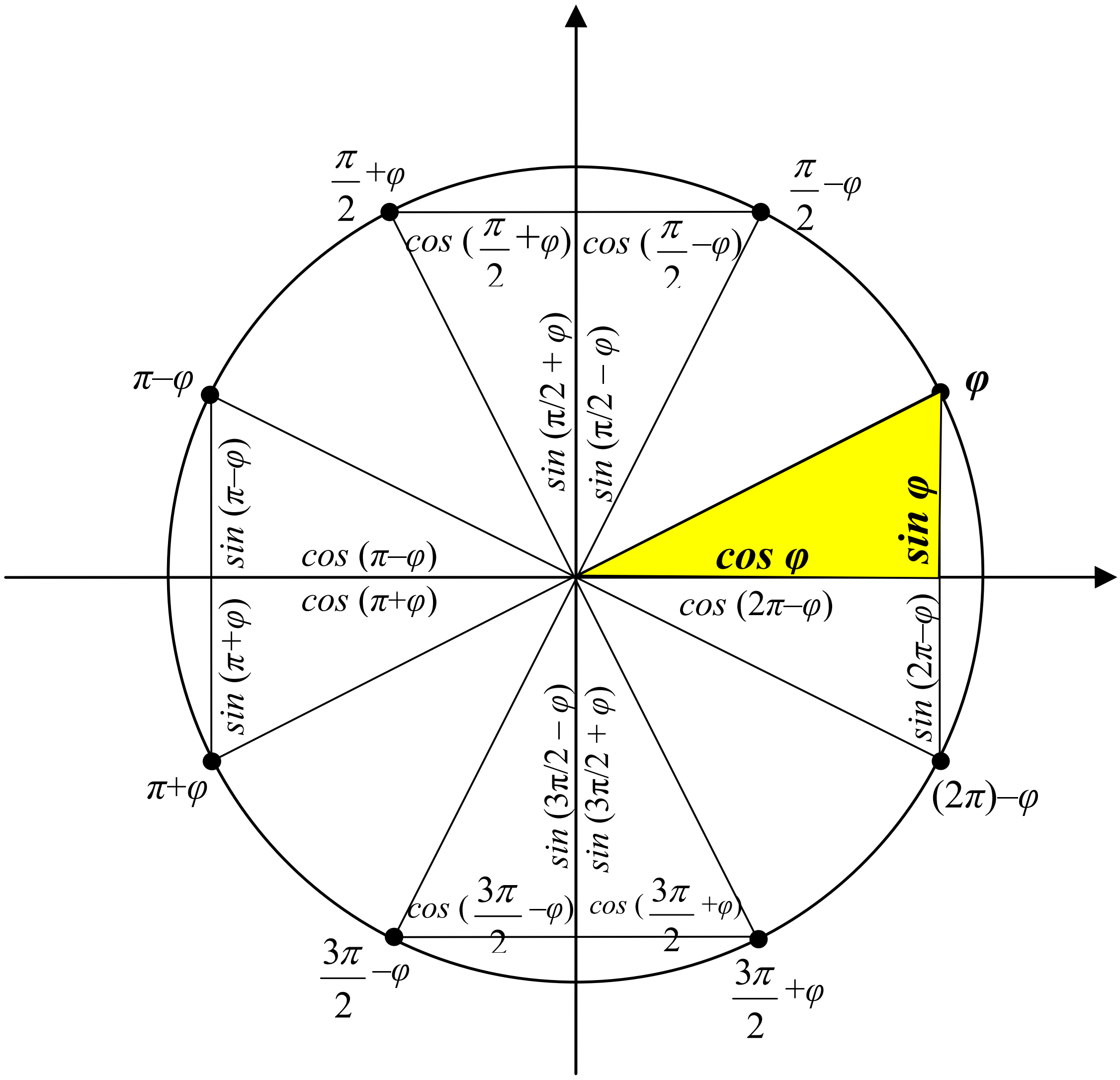
Пункты перасячэння трыганаметрычнай акружыны з восямі каардынат падзяляюць яе на 4 часткі (чвэрці). Адкладзем ад кожнага такога пункта ў адзін і другі бок па акружыне роўныя дугі (велічыню такой дугі абазначым φ). Тое, аб чым будзем далей гаварыць, прыгоднае для любых φ, але для зручнасці разважанняў выберам φ невялічкім (гл. мал. 35).

Атрымаем 8 новых пунктаў акружыны, каардынаты якіх на акружыне наступныя: φ, $\frac{\pi}{2}-\varphi$, $\frac{\pi}{2}+\varphi$, $\pi-\varphi$, $\pi+\varphi$, $\frac{3\pi}{2}-\varphi$, $\frac{3\pi}{2}+\varphi$, $-\varphi$ або $2\pi-\varphi$. Кожны з такіх пунктаў з’яўляецца вяршыняй прамавугольнага трохвугольніка з вострым вуглом $90^{\circ}-\varphi$, бо вугал кожнага трохвугольніка з вяршыняй у пачатку каардынат роўны φ. Усе гэтыя 8 трохвугольнікаў роўныя па старане (гіпатэнуза роўная 1) і прылеглых да яе вуглах. Таму роўныя і катэты трохвугольнікаў. Але даўжыні катэтаў такіх трохвугольнікаў адлюстроўваюць сінусы і косінусы адпаведных пунктаў акружыны (дакладней, модулі сінусаў і косінусаў). Будзем параўноўваць катэты ўсіх трохвугольнікаў з катэтамі першага трохвугольніка, выдзеленага на малюнку 35 колерам. Атрымаем такія роўнасці:

[1] $sin\ (\frac{\pi}{2} - \varphi) = cos\ \varphi$; [2] $cos\ (\frac{\pi}{2} - \varphi) = sin\ \varphi$;

[3] $sin\ (\frac{\pi}{2} + \varphi) = cos\ \varphi$; [4] $cos\ (\frac{\pi}{2} + \varphi) = -sin\ \varphi$;

Спынімся тут, каб усвядоміць праблему знакаў.



Малюнак 35

Апошняя роўнасць павінна была выглядаць так: $|cos\ (\frac{\pi}{2}+\varphi)| = |sin\ \varphi|$, бо даўжыні катэтаў роўны модулям адпаведных каардынат. Але $|sin\ \varphi| = sin\ \varphi$, бо φ – лік з першай чвэрці і яго сінус дадатны, а $|cos\ (\frac{\pi}{2}+\varphi)| = -cos\ (\frac{\pi}{2}+\varphi)$, бо $\frac{\pi}{2}+\varphi$ – лік з другой чвэрці і яго косінус адмоўны. Калі левую і правую часткі атрыманай роўнасці $-cos\ (\frac{\pi}{2}+\varphi) = sin\ \varphi$ дамножыць на –1, то і атрымаецца роўнасць 4. З першымі трыма роўнасцямі прасцей, там абедзве часткі роўнасцяў дадатныя. Калі ж φ узяць лікам не з першай чвэрці (бо сказана ж, што роўнасці справядлівыя для любых φ), то суадносіна знакаў будзе тая ж (вам прыдзецца паверыць тут аўтару на слова або дакапацца да сутнасці самастойна ці пачакаць лепшых часоў). А мы працягнем выпісваць роўнасці (абгрунтаванні для знакаў аналагічныя).

[5] $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$; [6] $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$;
[7] $\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi$; [8] $\cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi$;
[9] $\sin(\frac{3\pi}{2} - \varphi) = -\cos\varphi$; [10] $\cos(\frac{3\pi}{2} - \varphi) = -\sin\varphi$;
[11] $\sin(\frac{3\pi}{2} + \varphi) = -\cos\varphi$; [12] $\cos(\frac{3\pi}{2} + \varphi) = \sin\varphi$;
[13] $\sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi$; [14] $\cos(2\pi - \varphi) = \cos\varphi$;

Дарэчы, адкінуўшы ў апошніх роўнасцях 2π (перыяд сінуса і косінуса), атрымаем формулы цотнасці гэтых функцый:

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$; $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$;

Такім чынам, мы атрымалі 14 так званых формул прывядзення (чаму іх так назвалі, – пра гэта пазней). Столькі ж іх будзе для тангенса з катангенсам. Цікавая праблема: як запомніць 28 формул? Прыгледзімся да іх уважлівей. Можна заўважыць, што ў некаторых выпадках функцыя змяняецца (сінус на косінус, а косінус на сінус), а ў некаторых не змяняецца. Змяняецца там, дзе прысутнічае $\frac{\pi}{2}$ або $\frac{3\pi}{2}$ (пункты перасячэння акружыны з воссю ардынат) і не змяняецца там, дзе прысутнічае π або 2π (пункты перасячэння акружыны з воссю абсцыс). Калі аглядваць вось абсцыс, то даводзіцца круціць галавой справа налева, злева направа (так круцяць галавой, калі не пагаджаюцца з чымсьці). А калі аглядваць вось ардынат, то даводзіцца ківаць галавой знізу ўверх, зверху ўніз (так ківаюць, калі пагаджаюцца з чымсьці). Так знаходзіцца адказ на пытанне: ці змяніць функцыю? А пытанне аб знаку перад функцыяй вырашаецца проста, калі вы ўжо добра ўсвядомілі, як знаходзяцца сінус і косінус нейкага ліку і якія іх знакі атрымоўваюцца ў розных чвэрцях. Напрыклад, трэба пераўтварыць $\cos(\frac{3\pi}{2} - w)$. Вы ўспамінаеце, што калі ад $\frac{3\pi}{2}$ адняць нейкі маленькі лік, то патрапім у трэцюю чвэрць, а там косінус адмоўны, адразу пішам мінус. І далей зважаем на тое, на якой восі знаходзіцца $\frac{3\pi}{2}$ – на вертыкальнай (на восі ардынат). Ківаем галавой уздоўж гэтай восі і атрымоўваем адказ на пытанне, ця змяніць функцыю. Адказ: змяніць (косінус можа памяняцца толькі на сінус). У выніку і атрымалася, што $\cos(\frac{3\pi}{2} - w) = -\sin w$.

Усё тое ж паўтараецца з тангенсамі і катангенсамі. Выпішам тыя роўнасці.

$$[15]\ tg\,(\frac{\pi}{2} - \varphi) = ctg\,\varphi; \qquad [16]\ ctg\,(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \mathrm{tg}\,\varphi;$$

Патлумачэнне: $\frac{\pi}{2}$ зменіць функцыю (тангенс на катангенс, а катангенс на тангенс), а знак "плюс", бо $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ – лік з першай чвэрці, дзе ўсе функцыі дадатныя. Далей патлумачэнні рабіце самі.

$$[17]\ tg\,(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -ctg\,\varphi; \qquad [18]\ ctg\,(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -tg\,\varphi;$$

$$[19]\ tg\,(\pi - \varphi) = -tg\,\varphi; \qquad [20]\ ctg\,(\pi - \varphi) = -ctg\,\varphi;$$

$$[21]\ tg\,(\pi + \varphi) = tg\,\varphi; \qquad [22]\ ctg\,(\pi + \varphi) = ctg\,\varphi;$$

$$[23]\ tg\,(\frac{3\pi}{2} - \varphi) = ctg\,\varphi; \qquad [24]\ ctg\,(\frac{3\pi}{2} - \varphi) = tg\,\varphi;$$

$$[25]\ tg\,(\frac{3\pi}{2} + \varphi) = -ctg\,\varphi; \qquad [26]\ ctg\,(\frac{3\pi}{2} + \varphi) = -tg\,\varphi;$$

$$[27]\ tg\,(2\pi - \varphi) = -tg\,\varphi; \qquad [28]\ ctg\,(2\pi - \varphi) = -ctg\,\varphi;$$

Формулы прывядзення – асобная група формул, таму яны нумаруюцца асобнай нумарацыяй з квадратнымі дужкамі. Астатнія формулы будуць пазначацца нумарамі ў круглых дужках.

Чаму гэтыя формулы называюць формуламі прывядзення? Куды яны прыводзяць? Прыводзяць яны ў першую чвэрць, дзе лікі меншыя і значэнні ўсіх функцый дадатныя.

Напрыклад, трэба знайсці $cos\ 240^o$. 240^o – пункт з трэцяй чвэрці акружыны – пункт паміж 180^o і 270^o. Тады можна запісаць 240^o як $180^o + 60^o$ або $270^o - 30^o$. І цяпер, прымяніўшы адну з дзвюх формул прывядзення $cos\ 240^o = cos\ (180^o + 60^o) = -cos\ 60^o$ (бо косінус у ІІІ чвэрці адмоўны, а 180^o не зменіць функцыю) або $cos\ 240^o = cos\ (270^o - 30^o) = -sin\ 30^o$ (бо косінус у ІІІ чвэрці адмоўны, а 270^o зменіць функцыю), атрымаем пункты 60^o ці 30^o, пункты з І чвэрці.

Паколькі $cos\ 60^o = 0{,}5$ і $sin\ 30^o = 0{,}5$, то $cos\ 240^o = -0{,}5$.

Або, напрыклад, трэба параўнаць $-tg\ 253^o$ і $ctg\ 164^o$. Прывядзем лікі ў І чвэрць і зробім, каб функцыі былі аднолькавыя (напрыклад, тангенсы): $-tg\ 253^o = -tg\ (180^o + 73^o) = -tg\ 73^o$ (знак не зменіцца,бо тангенс у ІІІ чвэрці дадатны); $ctg\ 164^o = ctg\ (90^o + 74^o) = -tg\ 74^o$

(знак зменіцца, бо катангенс у II чвэрці адмоўны, а 90° зменіць функцыю).

$73^\circ < 74^\circ \Rightarrow tg\ 73^\circ < tg\ 74^\circ$ (бо тангенс у I чвэрці нарастальны: большым значэнням аргумента адпавядаюць большыя значэнні функцыі) $\Rightarrow -tg\ 73^\circ > -tg\ 74^\circ$ (бо пры множанні на адмоўны лік знак няроўнасці змяняецца) $\Rightarrow -tg\ 253^\circ > ctg\ 164^\circ$.

V-3. Трыганаметрычныя функцыі сумы (рознасці) аргументаў

Тут мы навучымся пераўтвараць выразы кшталту $sin\ (\alpha \pm \beta)$, $cos\ (\alpha \pm \beta)$, $tg\ (\alpha \pm \beta)$, $ctg\ (\alpha \pm \beta)$.

Для гэтага нам спатрэбяцца формулы скалярнага множання вектараў. Калі вектар $\vec{a}$ мае каардынаты $(a_1; a_2)$, а вектар $\vec{b}$ мае каардынаты $(b_1; b_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ або $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\ \varphi$ (тут $|\vec{a}|$ і $|\vec{b}|$ – даўжыні адпаведных вектараў, φ – вугал паміж імі).

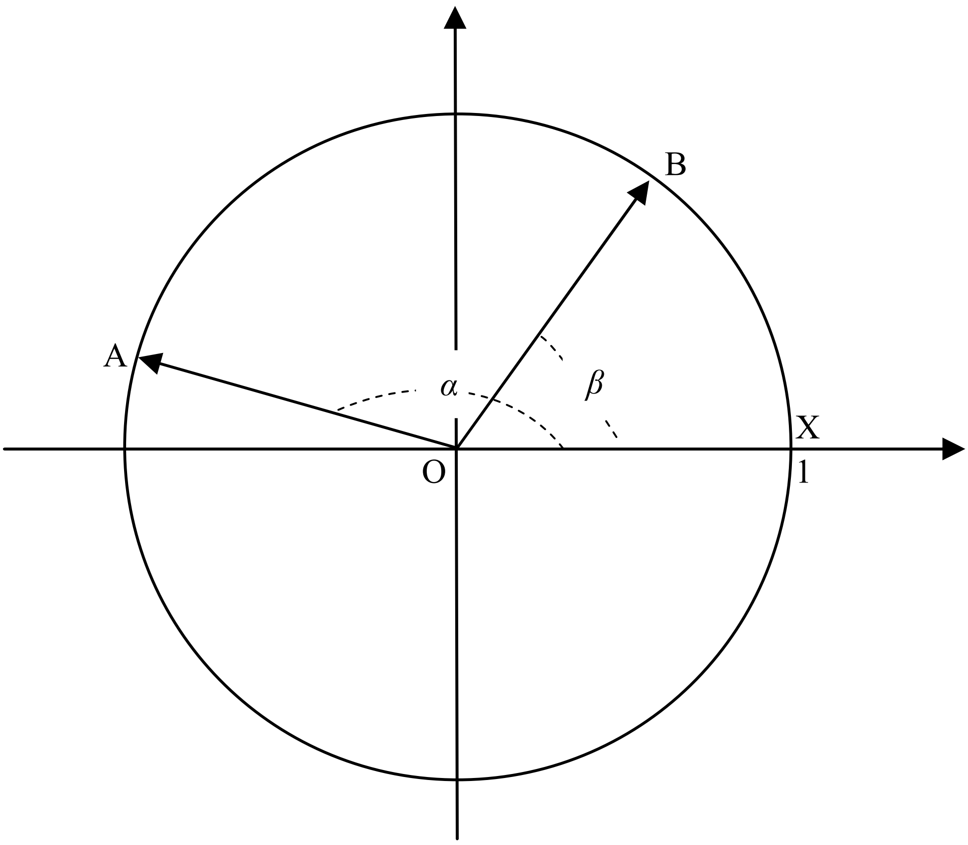
Возьмем на трыганаметрычнай акружыне два пункты: A з каардынатай α на акружыне і B з каардынатай β на акружыне (мал. 36). α і β трэба разумець так, што вектар $\overrightarrow{OA}$ утварае з дадатным кірункам восі абсцыс вугал α, а вектар $\overrightarrow{OB}$ утварае з дадатным кірункам восі абсцыс вугал β ($\angle XOA = \alpha$, $\angle XOB = \beta$). Атрымліваецца, што вугал AOB паміж вектарамі роўны $\alpha - \beta$. Даўжыні гэтых вектараў роўны 1 (бо трыганаметрычная акружына мае адзінкавы радыус), а іх каардынаты супадаюць з каардынатамі канцоў: $\overrightarrow{OA}(cos\ \alpha;\ sin\ \alpha)$, $\overrightarrow{OB}(cos\ \beta;\ sin\ \beta)$, бо каардынаты пачатку (0; 0). Цяпер, перамнажаючы гэтыя вектары скалярна па адной і другой формуле, атрымаем:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 1 \cdot cos\ (\alpha - \beta) = cos\ (\alpha - \beta),$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta + sin\ \alpha \cdot sin\ \beta.$$

Паколькі левыя часткі гэтых роўнасцяў аднолькавыя, то і правыя павінны быць аднолькаымі. Атрымаем формулу 7, справядлівую для любых α і β:

(7) $\boldsymbol{cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta + sin\ \alpha \cdot sin\ \beta}$ (косінус рознасці).



Малюнак 36

Гэтая формула – ключавая для ўсіх наступных формул, якія будуць атрымоўвацца простымі пераўтварэннямі з формулы 7. Паколькі формула 7 справядлівая для любых α і β, то α і β можна замяняць на любыя іншыя выразы. Замяніўшы β на $-\beta$ і ўлічыўшы, што $\cos(-\beta) = \cos\beta$ і $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, атрымаем формулу 8:

(8) $\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$ (косінус сумы).

Цяпер, калі нехта яшчэ сумняваўся ў правільнасці формул прывядзення не толькі для маленькіх φ, можа пераканацца ў тым з дапамогай новых формул. Напрыклад, $\cos(\frac{3\pi}{2} - \varphi) = \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos\varphi + \sin\frac{3\pi}{2} \cdot \sin\varphi = 0 \cdot \cos\varphi + (-1) \cdot \sin\varphi = -\sin\varphi$, што і трэба было атрымаць адпаведна формуле [10].

Каб атрымаць аналагічную формулу для сінуса сумы двух лікаў, скарыстаем адну з формул прывядзення $\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Яна дазволіць ад сінуса перайсці да косінуса, бо для косінуса формулы ўжо маюцца.

$sin\ (\alpha + \beta) = cos\ (\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = cos\ ((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)$ (пасля такога пераразмеркавання ўнутраных дужак можна пачаць прымяненне формулы 7) $= cos\ (\frac{\pi}{2} - \alpha)\ cos\ \beta + sin\ (\frac{\pi}{2} - \alpha)\ sin\ \beta$ (прымяніўшы яшчэ раз парачку формул прывядзення, атрымаем) $= sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta$.

Так формулы прывядзення дапамаглі даказаць формулу 9:

(9) $\boldsymbol{sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta}$ (сінус сумы).

Замена тут β на $-\beta$ і скарыстанне ўласцівасцяў цотнасці сінуса і косінуса прывядзе да формулы 10, таксама справядлівай для любых α і β:

(10) $\boldsymbol{sin\ (\alpha - \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta}$ (сінус рознасці).

Каб атрымаць адпаведныя формулы для тангенса, дастаткова ўспомніць, што тангенс ліку ёсць дзель сінуса гэтага ліку на яго косінус, скарыстаць ужо даказаныя формулы 7-10, пасля чаго скараціць дроб (гэта значыць падзяліць яго лічнік і назоўнік) на здабытак косінусаў. Прасочым за гэтымі пераўтварэннямі:

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} =$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Так атрымоўваецца формула 11, справядлівая для ўсіх α і β, акрамя тых, для якіх $cos\ \alpha$ ці $cos\ \beta$ ці $cos\ (\alpha + \beta)$ роўны нулю:

(11) $\boldsymbol{tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$ (тангенс сумы).

Замена ў гэтай формуле β на $-\beta$ і скарыстанне ўласцівасцяў цотнасці тангенса прывядзе да формулы 12, справядлівай для любых α і β, акрамя тых, для якіх $cos\ \alpha$ ці $cos\ \beta$ ці $cos\ (\alpha - \beta)$ роўны нулю:

(12) $\boldsymbol{tg\ (\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$ (тангенс рознасці).

Для катангенса сумы ці катангенса рознасці асобных формул звычайна не выпісваюць, бо катангенс ліку адваротны тангенсу гэтага ліку і таму $ctg\,(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{tg(\alpha+\beta)} = \dfrac{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$.

Такім чынам, вы маеце 6 формул для трыганаметрычных функцый сумы ці рознасці двух аргументаў. Лягчэй запомніць не самі формулы, а тое, як яны атрымоўваюцца. Так будзе і далей, імкніцеся запамінаць пераход ад адной формулы да другой, бо гэтыя пераходы зусім простыя і маюць шмат аднолькавых элементаў.

І помніце, што кожная формула дае два віда пераўтварэнняў. Гэтак жа, як размеркавальны закон множання адносна складання дазваляе і дужкі раскрываць [$a(b+c) = ab+ac$], і выносіць агульны множнік за дужкі [$ab+ac = a(b+c)$], так і новыя формулы вы павінны бачыць двухбакова. І калі вам сустрэнецца выраз кшталту $\cos 74^\circ \cdot \cos 46^\circ - \sin 46^\circ \cdot \sin 74^\circ$, вы павінны адразу распазнаць тут $\cos\,(74^\circ + 46^\circ) = \cos 120^\circ$.

І вось толькі зараз мы можам выканаць дадзенае раней абяцанне. Абяцалася раней, што вы будзеце ведаць дакладныя значэнні трыганаметрычных функцый 24 пунктаў акружыны, а на выніковым малюнку 12 такіх пунктаў паказана 16. Якія ж пункты там прапушчаныя? Тыя, для якіх дроб з назоўнікам 12 не скарачаўся да меншага назоўніка: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$ і $\frac{23\pi}{12}$ (або ў градусах: 15°, 75°, ...). Цяпер можна, скарыстоўваючы формулы трыганаметрычных функцый сумы (рознасці) двух аргументаў, запоўніць той прабел. Пакажам, як гэта робіцца, на некалькіх прыкладах.

$\sin 15^\circ = \sin\,(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

$\cos 15^\circ = \cos\,(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

$tg\ 15^\circ = \dfrac{\sin 15^o}{\cos 15^o} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} : \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ (пазбавімся ад кораняў у назоўніку) $= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$;

Адпаведным чынам $ctg\ 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

Усё астатняе – праз формулы прывядзення: $sin\ 75^o = sin\ (90^o - 15^o) = cos\ 15^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$... (лікі з новымі модулямі ўжо не з’явяцца). Такім чынам абяцанне пра 24 пункты выканана. Выбачайце, што давялося доўга чакаць.

Разгледзім яшчэ адно карыснае і досыць папулярнае пераўтварэнне, у якім скарыстоўваюцца формулы 7-10. Справа ў тым, што выразы, якія ўтрымліваюць некалькі трыганаметрычных функцый, часта спрабуюць замяніць выразам, які ўтрымлівае толькі адну трыганаметрычную функцыю. Найчасцей гэта робіцца там, дзе патрабуецца параўноўваць, ацэньваць значэнні выразаў. Пра выраз $sin\ (\pi x^5+ 77x^3-29x^2+1588)$ вы можаце дакладна сказаць, што яго значэнні належаць прамежку [–1; 1], што б там у дужках ні было напісана, бо гэта значэнні сінуса. А што вы можаце сказаць пра значэнні выразу $sin\ x + cos\ x$? Пакуль нічога? Калі вы назавеце прамежак [–2; 2], то гэта будзе памылкай. Чаму, – зразумеем пазней.

Спачатку ж навучымся пераўтвараць выразы кшталту $a\ sin\ x + b\ cos\ x$, дзе a і b – любыя лікі, а x – свабодная зменная, у выразы, якія змяшчаюць толькі адну функцыю. Спачатку патлумачым сутнасць меркаваных пераўтварэнняў, потым выканаем іх. Вынесшы за дужкі лік $\sqrt{a^2+b^2}$ – квадратны корань з сумы квадратаў каэфіцыэнтаў, атрымаем у дужках іншыя каэфіцыэнты: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Гэтыя лікі як раз такія, пра якія гаварылася ў тэаэрэме, адваротнай асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці (нагадаем яе: калі $m^2 + n^2 = 1$, то існуе лік φ такі, што $m = cos\ \varphi$, $n = sin\ \varphi$). Пераканайцеся, што $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Таму першы з іх назавем сінусам нейкага φ (іштo за лік φ – з гэтым разбярэмся пазней, зараз галоўнае, што такі лік існуе), другі – косінусам таго ж φ. Атрымаем у дужках выраз $sin\ \varphi\ sin\ x + cos\ \varphi\ cos\ x$, які вы павінны ўжо пазнаць, бо гэта $cos\ (x - \varphi)$ або $cos\ (\varphi - x)$ – каму як падабаецца, бо для цотнага косінуса гэта адно і тое ж. А цяпер прасачыце за гэтымі пераўтварэннямі ў камплекце:

$$a\ sin\ x + b\ cos\ x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\ (\ sin\ \varphi\ sin\ x + cos\ \varphi\ cos\ x) = \sqrt{a^2+b^2}\ cos\ (x - \varphi).$$

І – о, шчасце! – атрымаўся выраз, які змяшчае толькі адну трыганаметрычную функцыю.

Калі б вы першы з дробных каэфіцыэнтаў абазвалі косінусам ліку φ, а другі – сінусам таго ж ліку φ, то ў выніку атрымаўся б выраз $\sqrt{a^2+b^2}\ sin\ (x+\varphi)$, які змяшчае іншую трыганаметрычную функцыю, але ж зноў адну.

Каб ужо вызначыцца з лікам φ, то адзначым, што φ можна назваць так: $\varphi = arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (бо $sin\ \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$), або так: $\varphi = arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (бо $cos\ \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$). А калі вылічыць $tg\ \varphi = sin\ \varphi : cos\ \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} : \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{b}$, то можна назваць і так: $\varphi = arctg\dfrac{a}{b}$. Так часцей і называюць, бо гэта самы кароткі запіс.

Пасля гэтага можна вярнуцца да выразу $sin\ x + cos\ x$. Было пытанне пра мноства яго значэнняў. Выканаем тыя пераўтварэнні, пра якія толькі што гаварылася, улічыўшы, што $a = 1$ і $b = 1$ і таму $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$, а яшчэ ўспомнім, што $arctg\ 1 = \dfrac{\pi}{4}$:

$$sin\ x + cos\ x = \sqrt{2}\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ sin\ x + \frac{1}{\sqrt{2}}\ cos\ x\right) = \sqrt{2}\ cos\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Мы ведаем, што любы косінус прымае значэнні з прамежку [–1;1], а таму: $-1 \le cos\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$. Памножыўшы кожную частку гэтай няроўнасці на $\sqrt{2}$, атрымаем: $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\ cos\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$. З чаго і робім выснову, што $sin\ x + cos\ x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, а не [–2; 2]. Вось як!

V-4. Трыганаметрычныя функцыі падвоеных і палавінных аргументаў

(8) $\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sin\ \alpha \cdot sin\ \beta}$;

(9) $\boldsymbol{sin\ (\alpha + \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sin\ \beta}$;

(11) $\boldsymbol{tg\ (\alpha + \beta)} = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$.

Калі ў формулах сінуса, косінуса, тангенса сумы двух аргументаў, якія тут узгаданыя, замяніць β на α, то атрымаем некалькі новых формул для функцый падвоеных аргументаў.

(13) $\boldsymbol{cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha}$ (косінус падвоенага аргумента).

Калі тут узгадаць яшчэ асноўную трыганаметрычную тоеснаць, з якой атрымаем і падставім у роўнасць 13 $sin^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha$ або $cos^2\ \alpha = 1 - sin^2\ \alpha$, то формула 13 прыме два новыя выгляды:

(13*а*) $\boldsymbol{cos\ 2\alpha = 2cos^2\ \alpha - 1}$ або

(13*б*) $\boldsymbol{cos\ 2\alpha = 1 - 2sin^2\ \alpha}$.

Кожная з трох формул косінуса падвоенага аргумента пасвойму карысная. У раўнаннях часцей прыдзецца скарыстоўваць 13*а* ці 13*б*, каб атрымаць роўнасць з адной трыганаметрычнай функцыяй. А калі маецца дробны выраз, які пажадана скараціць, то часцей скарыстоўваюць варыянт 13, бо там рознасць квадратаў, якая раскладваецца на множнікі.

З формулы 9 заменай β на α атрымаем:

(14) $\boldsymbol{sin\ 2\alpha = 2sin\ \alpha\ cos\ \alpha}$ (сінус падвоенага аргумента).

Гэта ці не самая папулярная формула пры пераўтварэннях трыганаметрычных выразаў. Напрыклад, яна дапаможа ацаніць мноства значэнняў здабытку *sin x cos* x (гэта цікава, бо значэнні сумы $sin\ x + cos\ x$ мы ўжо ведаем): $sin\ x\ cos\ x = \frac{1}{2} \cdot 2\ sin\ x\ cos\ x = \frac{1}{2}\ sin\ 2x$. Паколькі сінус ліку можа прымаць значэнні з прамежку $[-1;\ 1]$, то атрыманы выраз можа прымаць значэнні толькі з прамежку $[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}]$.

Карысна ведаць, што $sin\ x\ cos\ x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

А з формулы 11 аналагічнай заменай атрымаем:

$$\textbf{(15)}\quad \boldsymbol{tg\,2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$ (тангенс падвоенага аргумента).

Пра катангенс падвоенага аргумента вы ўжо здагадаліся:

$$\boldsymbol{ctg\,2\alpha} = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\ \alpha}.$$

Паглядзіце некалькі прыкладаў пераўтварэнняў з гэтымі формулами:

$$tg\ 6r = tg\ 2\cdot 3r = \frac{2tg3r}{1-tg^2 3r};$$

$$cos\ 7y = \cos\ 2\cdot 3{,}5y = 1 - 2\ sin^2\ 3{,}5y;$$

$$sin\ Ю = sin\ 2\cdot\frac{Ю}{2} = 2sin\ \frac{Ю}{2}\cdot cos\frac{Ю}{2}.$$

Асаблівую цікавасць выклікае пераўтварэнне здабытку косінусаў, аргументы якіх ўяўляюць геаметрычную прагрэсію з назоўнікам 2:

$cos\ x\ cos\ 2x\ cos\ 4x\ cos\ 8x\ cos\ 16x$ (уявім гэты выраз як дроб з назоўнікам 1 і дамножым яго лічнік і назоўнік на 2 $sin\ x$) = $\frac{(2\sin x\cdot\cos x)\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x}{2\sin x}$ (выраз, узяты ў дужкі, уяўляе сабой сінус падвоенага аргумента $2x$) = $\frac{\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x}{2\sin x}$ (дамножыўшы лічнік і назоўнік на 2, мы ўбачым у лічніку выраз 2 $sin\ 2x\ cos\ 2x$ – гэта сінус падвоенага аргумента $4x$) = $\frac{(2\sin 2x\cdot\cos 2x)\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x}{2\cdot 2\sin x}$ = $\frac{\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x}{2\cdot 2\sin x}$ (зной бачым у лічніку сінус і косінус аднолькаввых аргументаў $4x$; з двойкай, на якую дамножым лічнік і назоўнік, гэта сінус падвоенага аргумента $8x$; паўтараем гэтую працэдуру яшчэ і яшчэ, пакуль у лічніку не закончацца множнікі) = $\frac{(2\sin 4x\cdot\cos 4x)\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x}{2\cdot 2\cdot 2\sin x}$ = $\frac{\sin 8x\cdot\cos 8x\cdot\cos 16x}{2\cdot 2\cdot 2\sin x}$ =

$$\frac{(2\sin 8x\cdot\cos 8x)\cdot\cos 16x}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\sin x}=\frac{\sin 16x\cdot\cos 16x}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\sin x}=\frac{2\sin 16x\cdot\cos 16x}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\sin x}=\frac{\sin 32x}{32\sin x}.$$

Але вернемся да формул 13а і 13б, яны досыць змястоўныя і здольныя нараджаць новыя формулы.

Напрыклад, з формулы 13*а* можна выразіць $cos^2\ \alpha$, а з формулы 13*б* можна выразіць $sin^2\ \alpha$. Атрымаем дзве новыя формулы, якія называюць **формуламі паніжэння ступені**:

(16) $\boldsymbol{cos^2\ \alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$; **(17)** $\boldsymbol{sin^2\ \alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$.

Калі ў дзвюх апошніх формулах замяніць α на $\frac{\alpha}{2}$, то атрымаем новыя формулы:

(18) $\boldsymbol{cos\ \dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}}$ (косінус палавіннага аргумента);

(19) $\boldsymbol{sin\ \dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}}$ (сінус палавіннага аргумента).

Зразумела, што плюс ці мінус перад коранем выбіраюць у залежнасці ад чвэрці, да якой адносіцца $\frac{\alpha}{2}$.

Цяпер напрошваецца такая ж формула для тангенса.

$tg\ \frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ (дамножым лічнік і назоўнік на $2sin\ \frac{\alpha}{2}$ і прыменім у лічніку формулу паніжэння ступені сінуса, а ў назоўніку формулу сінуса падвоенага аргумента) $=\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

Або інакш: $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ (дамножым лічнік і назоўнік на $2cos\,\frac{\alpha}{2}$ і прыменім у лічніку формулу сінуса падвоенага аргумента, а ў назоўніку формулу паніжэння ступені косінуса) $= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

І мы атрымалі дзве формулы тангенса палавіннага аргумента (кожны раз пры патрэбе будзеце выбіраць, якая лепш падыходзіць):

$$\textbf{(20)}\quad tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \textbf{(21)}\quad tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Няцяжка здагадацца, што катангенс палавіннага аргумента будзе роўны адваротным дробам.

Можна было абяцанне пра 24 пункты выканаць і тут:

$$sin\ 15^{\circ} = sin\ \frac{30^{o}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^{o}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Але ж тут сюрпрыз! Раней атрымалася, што $sin\ 15^{\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Не здзіўляйцеся і не шукайце памылак, іх няма. Проста $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ і $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ – гэта адзін і той жа дадатны лік (можаце пераканацца ў тым узвядзеннем гэтых выразаў у квадрат).

У трыганаметрыі так раз-пораз бывае, калі вылічэнні адным спосабам прыводзяць да аднаго выніку, а вылічэнні другім спосабам прыводзяць да таго ж выніку, але па-іншаму запісанага. Так бывае і з трыганаметрычнымі раўнаннямі, калі развязванне раўнання адным спосабам прыводзіць да аднаго адказу, а развязванне іншым спосабам – нібыта да іншага адказу, хаця пэўнымі пераўтварэннямі можна паказаць, што гэтыя адказы аднолькавыя. Але ж нейкая праблема тут ёсць, асабліва для тых, хто будзе здаваць іспыты ў форме тэстаў, дзе трэба знайсці правільны адказ сярод некалькіх пададзеных. Выйсце адно: навучыцца выконваць пераўтварэнні трыганаметрычных ды іншых выразаў, каб пры неабходнасці даказваць іх аднолькавасць ці неаднолькавасць.

V-5. Формулы складання і множання трыганаметрычных функцый

З любымі новымі выразамі пажадана навучыцца выконваць матэматычныя аперацыі – складанне, адыманне, множанне, дзяленне, узвядзенне ў ступень... Некаторыя з гэтых аперацый допускаюць спрошчаны варыянт з дапамогай формул (а формула – гэта матэматычны закон). Напрыклад, узвядзенне бінома ў квадрат не трэба кожны раз выконваць множаннем бінома $a + b$ на $a + b$. Прасцей скарыстаць формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Для множання ступеняў ёсць свае формулы: $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ (для ступеняў з аднолькавымі асновамі) ці $\boldsymbol{a^x \cdot b^x = (ab)^x}$ (для ступеняў з аднолькавымі паказнікамі). Для складання ж ступеняў формулы няма і гэта азначае, што пры складанні ступеняў трэ будзе спачатку вылічыць кожную ступень асобна, а потым скласці атрыманыя лікі. З формуламі, што ні кажы, прасцей. Таму пашукаем формулы для складання і множання трыганаметрычных функцый. Для гэтага вернемся да формул 7-10, дзе ёсць і складанне, і адыманне, і множанне:

(7) $\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$ (косінус рознасці);

(8) $\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$ (косінус сумы);

(9) $\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$ (сінус сумы);

(10) $\boldsymbol{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$ (сінус рознасці).

Выканаем складанне роўнасцяў 7 і 8:

$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$ (здабыткі сінусаў знікнуць, бо яны з супрацьлеглымі знакамі). З атрыманай роўнасці дзяленнем на 2 атрымаем:

(22) $\boldsymbol{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ (здабытак косінусаў).

А калі ў роўнасці $cos\,(\alpha - \beta) + cos\,(\alpha + \beta) = 2\,cos\,\alpha \cdot cos\,\beta$ выканаць падстаноўку $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$ (пры складанні гэтых падстановачных роўнасцяў атрымаем $2\,\alpha = x + y$, адкуль $\alpha = \frac{x+y}{2}$, а пры іх адыманні атрымаем $2\,\beta = x - y$, адкуль $\beta = \frac{x-y}{2}$), то народзіцца яшчэ адна формула:

$$\textbf{(23)}\quad \boldsymbol{cos\,x + cos\,y = 2\,cos\frac{x+y}{2}\,cos\frac{x-y}{2}}$$ (сума косінусаў).

Калі ж выканаць адыманне роўнасці 7 ад роўнасці 8, то атрымаем роўнасць $cos\,(\alpha + \beta) - cos\,(\alpha - \beta) = -2\,sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$ (здабыткі косінусаў знікнуць, бо яны з аднолькавымі знакамі), з якой тымі ж прыёмамі атрымаюцца дзве новыя формулы:

$$\textbf{(24)}\quad \boldsymbol{sin\,\alpha \cdot sin\,\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{-2}$$ (здабытак сінусаў),

$$\textbf{(25)}\quad \boldsymbol{cos\,x - cos\,y = -2\,sin\frac{x+y}{2}\,sin\frac{x-y}{2}}$$ (рознасць косінусаў).

Звярніце ўвагу на мінусы ў апошніх формулах (яны маюць звычку губляцца). Можна перапісаць гэтыя формулы без мінусаў: $sin\,\alpha \cdot sin\,\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$ і $cos\,x - cos\,y = 2\,sin\frac{x+y}{2}\,sin\frac{y-x}{2}$, але тады трэба запомніць, што ў першай з іх трэба ад косінуса рознасці адымаць косінус сумы, а ў другой – адыманне аргументаў пад сінусам адваротнае. У любым выпадку нешта трэба запомніць. А лепш і не запамінаць. Можна ўзяць тыя ж формулы косінуса сумы і косінуса рознасці і, выканаўшы іх складанне ці адыманне, атрымаць патрэбную з новых чатырох формул. Запамінайце не формулы, запамінайце пераходы ад адной да другой.

З формуламі 9 і 10 (сінус сумы і сінус рознасці) будзем выконваць тыя ж аперацыі.

Складаннем атрымаем роўнасць $sin\,(\alpha + \beta) + sin\,(\alpha - \beta) = 2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\beta$, з якой народзяцца дзве новыя формулы:

(26) $\boldsymbol{\sin\alpha\cdot\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ (здабытак сінуса на косінус),

(27) $\boldsymbol{\sin x+\sin y=2\sin}\dfrac{x+y}{2}\,\boldsymbol{\cos}\dfrac{x-y}{2}$ (сума сінусаў).

З цотным косінусам добра працаваць: калі замест $\cos\dfrac{x-y}{2}$ напішаце $\cos\dfrac{y-x}{2}$, то ніякай памылкі не будзе. Таму пры такім адыманні выбірайце больш зручны варыянт.

Замена y на $-y$ ў формуле 27 выведзе на чарговую формулу:

(28) $\boldsymbol{\sin x-\sin y=2\sin}\dfrac{x-y}{2}\,\boldsymbol{\cos}\dfrac{x+y}{2}$ (рознасць сінусаў).

Вось тут замена $\sin\dfrac{x-y}{2}$ на $\sin\dfrac{y-x}{2}$ прывядзе да памылкі, бо сінус – функцыя няцотная і рэагуе на змену знака аргумента зменай свайго знака.

Такім чынам, у вас з'явіліся ажно 7 формул для дзеянняў з трыганаметрычнымі функцыямі (здабытак сінусаў, здабытак косінусаў, здабытак сінуса на косінус, сума сінусаў, сума косінусаў, рознасць сінусаў і рознасць косінусаў). Вы спытаеце: а як выконваць складанне сінуса з косінусам ці іх адыманне? А вось тут успамінайце формулы прывядзення, якія дазваляюць змяняць функцыі. Напрыклад, $\sin$ U – $\cos$ V = $\sin$ U + $\sin$ (270° + V) (і далей пераўтвараем як суму сінусаў па формуле 27) = $2\sin\dfrac{270^o+V+U}{2}\cos\dfrac{270^o+V-U}{2}$.

Для тангенса з катангенсам асобных формул складання і множання звычайна не выдзяляюць, адпаведныя пераўтварэнні часцей выконваюцца пераходам да сінуса з косінусам. Але камусьці гэта можа прыгадзіцца (хто так не лічыць, можа наступны тэкст з формуламі 29-34 прапусціць).

$$tg\,x + tg\,y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} =$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}.$$

Так атрымалася формула

(29) $\boldsymbol{tg\,x + tg\,y} = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$ (сума тангенсаў).

Аналагічным шляхам можна атрымаць наступныя формулы:

(30) $\boldsymbol{tg\,x - tg\,y} = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$ (рознасць тангенсаў);

(31) $\boldsymbol{ctg\,x + ctg\,y} = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y}$ (сума катангенсаў).

(32) $\boldsymbol{ctg\,x - ctg\,y} = -\dfrac{\sin(x-y)}{\sin x \cdot \sin y}$ (рознасць катангенсаў – увага на мінус!).

(33) $\boldsymbol{tg\,x + ctg\,y} = \dfrac{\cos(x-y)}{\cos x \cdot \sin y}$ (сума тангенса з катангенсам).

Апошняя формула заменай *y* на *x* пераўтворыцца ў яшчэ адну цікавую формулу:

$$tg\,x + ctg\,x = \frac{\cos(x-x)}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{2}{2\cos x \cdot \sin x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

(34) $\boldsymbol{tg\,x + ctg\,x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$ (сума тангенса і катангенса роўных лікаў).

Мы згодныя з тымі, хто лічыць, што гэтыя формулы прасцей выводзіць кожны раз, чым запамінаць.

На гэтым можна ў пытанні пра аперацыі з трыганаметрычнымі функцыямі паставіць кропку.

Якімі б формуламі вас яшчэ пацешыць?

V-6. Выражэнне трыганаметрычных функцый ліку

праз тангенс палавіны гэтага ліку

Пры пераўтварэнні выразаў, у раўнаннях могуць сустракацца розныя трыганаметрычныя функцыі разам. Такія пераўтварэнні выконваць цяжэй, чым тыя, дзе такая функцыя толькі адна. У раўнаннях такую функцыю (калі яна адна) можна пераабазваць якой-небудзь літарай і атрымаць у выніку нескладанае алгебраічнае раўнанне. Хацелася б умець замяняць выразы з рознымі трыганаметрычнымі функцыямі на выразы з адной такой функцыяй. Такая магчымасць ёсць, любую з чатырох вядомых вам трыганаметрычных функцый можна выразіць праз тангенс палавіннага аргумента.

Напачатку ўспомнім формулу 15 тангенса падвоенага аргумента: $tg\ 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$. Заменай у ёй α на $\dfrac{\alpha}{2}$ прывядзе да патрэбанага выніку:

(35) $\boldsymbol{tg\ \alpha} = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$ (выражэнне тангенса праз тангенс палавіннага аргумента).

Атрымаць наступную формулу нескладана:

(36) $\boldsymbol{ctg\ \alpha} = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{2tg\dfrac{\alpha}{2}}$ (выражэнне катангенса праз тангенс палавіннага аргумента).

Каб атрымаць адпаведныя формулы для сінуса і косінуса, у формулах сінуса і косінуса падвоенага аргумента выканаем тую ж замену α на $\dfrac{\alpha}{2}$, атрыманы выраз падзелім на трыганаметрычную адзінку (ад дзялення на адзінку выраз не зменіцца) і скароцім атрыманы дроб на $cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. Прасачыце за пераўтварэннямі:

$$sin\,\alpha = sin\,2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2sin\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1};$$

$$cos\,\alpha = cos\,2\cdot\frac{\alpha}{2} = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1};$$

Вынік:

(37) $\boldsymbol{sin\,\alpha} = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ (выражэнне сінуса праз тангенс палавіннага аргумента)**;**

(38) $\boldsymbol{cos\,\alpha} = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ (выражэнне косінуса праз тангенс палавіннага аргумента).

Мабыць, формул ужо хопіць. Пара вучыцца карыстацца імі.

VI-1. Трыганаметрычныя раўнанні

Трыганаметрычнымі раўнаннямі называюць такія раўнанні, якія ўтрымліваюць зменную (ці некалькі зменных) пад знакамі трыганаметрычных функцый. Развязванне трыганаметрычных раўнанняў так ці інакш зводзіцца да развязвання прасцейшых трыганаметрычных раўнанняў. Таму, перш чым асвойваць гэты раздзел, вярніцеся да раздзела “Прасцейшыя трыганаметрычныя раўнанні”, паглядзіце і яшчэ раз асэнсуйце, як развязваецца кожнае з чатырох прасцейшых трыганаметрычных раўнанняў з апорай на трыганаметрычную акружыну ці на адпаведны графік. Звядзенне трыганаметрычнага раўнання да прасцейшага выгляду выконваецца пры дапамозе звычайных алгебраічных пераўтварэнняў (раскрыццё дужак і вынясенне агульнага множніка за дужкі, пераўтварэнні па формулах скарочанага множання, дзеянні з дробнымі выразамі ды інш.), якія вы ўжо ўмееце выконваць, і з дапамогай формул трыганаметрыі. Пры гэтым досыць часта даводзіцца трыганаметрычную функцыю замяняць якой-небудзь літарай, каб з трыганаметрычнага раўнання атрымаць знаёмае алгебраічнае раўнанне. Паглядзім на прыкладах, як гэта робіцца.

Прыклад **1**. $8cos^2 3x - 6cos\, 3x - 5 = 0$.

Тут прысутнічае толькі адна трыганаметрычная функцыя $cos\, 3x$, таму, пераназваўшы яе, напрыклад, літарай p ($cos\, 3x = p$), атрымаем квадратнае раўнанне $8p^2 - 6p - 5 = 0$, корані якога $\frac{5}{4}$ і $-\frac{1}{2}$. Засталося развязаць два прасцейшыя трыганаметрычныя раўнанні $cos\, 3x = \frac{5}{4}$ і $cos\, 3x = -\frac{1}{2}$. Першае з іх кораняў не мае, бо $\frac{5}{4} > 1$, а косінус такім не бывае. А другое развязваецца па формуле: $3x = \pm arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, адкуль $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in Z$. Гэта і ёсць *адказ*.

Прыклад **2**. $2sin^2 35x + sin\, 35x - 4 = 0$.

Зноў жа увядзём новую зменную $sin\, 35x = u$ і атрымаем квадратнае раўнанне $2u^2 + u - 4 = 0$. Вылічым яго дыскрымінант D =

33, тады корані $u = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$. Паспрабуем разабрацца, што за лікі атрымаліся. $\sqrt{33} > 5 \Rightarrow -1 + \sqrt{33} > 4 \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{33}}{4} > 1$; $\sqrt{33} > 5 \Rightarrow -\sqrt{33} < -5 \Rightarrow -1 - \sqrt{33} < -6 \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{33}}{4} < -1{,}5$. Як высветлілася, абодва гэтыя лікі па модулю большыя за адзінку, таму ні воднае з раўнанняў $\sin 35x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$ кораняў не мае. *Адказ*: кораняў няма.

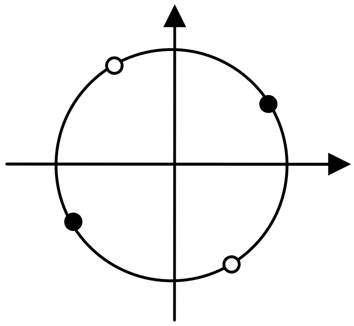
Прыклад **3**. $18\cos^2 2x - 9\cos 2x - 5 = 0$.

Паўтарыўшы прыём з папярэдніх прыкладаў ($\cos 2x = b$), атрымаем квадратнае раўнанне $18b^2 - 9b - 5 = 0$. Яго корані: $-\frac{1}{3}$ і $\frac{5}{6}$, абодва па модулю меншыя за адзінку. Цяпер прыдзецца развязваць абодва раўнанні: $\cos 2x = -\frac{1}{3}$ або $\cos 2x = \frac{5}{6}$. З першага: $2x = \pm \arccos(-\frac{1}{3}) + 2\pi n$, адкуль $x = \pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{3}) + \pi n$; з другога: $2x = \pm \arccos\frac{5}{6} + 2\pi k$, адкуль $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} + \pi k$, дзе n, k – любыя цэлыя лікі ($n, k \in Z$). *Адказ*: $\pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{3}) + \pi n$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} + \pi k$, $n, k \in Z$ (заўвага: літары для называння колькасці перыядаў для адказаў у розных раўнаннях пажадана выкарыстоўваць розныя; тут: n і k).

Прыклад **4**. $3tg^2 x + 2\sqrt{3}\, tg\, x - 3 = 0$.

Пачатак той жа: $tg\, x = t$, тады $3t^2 + 2\sqrt{3}\, t - 3 = 0$, адкуль $t = -\sqrt{3}$ або $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (для тангенса не трэба высвятляць, што за лікі атрымаліся, тут любыя падыходзяць). Атрымалі два прасцейшыя трыганаметрычныя раўнанні: $tg\, x = -\sqrt{3}$ або $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. *Адказ*: $-\frac{\pi}{3} + \pi m$; $\frac{\pi}{6} + \pi c$; $m, c \in Z$. Але! Перш, чым запісваць адказ, карысна глянуць на атрыманыя лікі на акружыне.

На малюнку 37 адказ для першага раўнання паказаны чорнымі пунктамі, для другога – белымі. Калі прыгледзецца да гэтых пунктаў, то можна заўважыць, што яны размешчаны на акружыне праз аднолькавыя прамежкі велічынёй $\frac{\pi}{2}$. Гэта дазваляе запісаць адказ адной



Малюнак 37

формулай: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$ (гэта значыць: першы пункт $\frac{\pi}{6}$, а далей праз кожныя $\frac{\pi}{2}$ радыянаў, або першы пункт 30^o, а далей праз кожныя 90^o).

Прыклад **5**. $8sin^2 3x + 6cos\, 3x - 3 = 0$.

Тут ужо прысутнічаюць дзве розныя трыганаметрычныя функцыі, але добра, што на месцы аргумента стаяць аднолькавыя выразы $3x$. З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці (формула 4) маем: $sin^2 3x = 1 - cos^2 3x$. Атрымаем раўнанне з аднымі косінусамі: $8(1 - cos^2 3x) + 6cos\, 3x - 3 = 0$, якое пасля раскрыцця дужак, прывядзення падобных і дамнажэння на –1 пераўтворыцца ў раней развязанае раўнанне (далей гл. прыклад 1).

Прыклад **6**. $cos\, 70x + 3 = sin\, 35x$.

Тут ужо не толькі функцыі розныя, але розныя і іх аргументы. Ды можна заўважыць, што $70x$ – гэта падвоены $35x$. Тады напрошваецца скарыстаць формулу косінуса падвоенага аргумента. Такіх формул ажно тры. Возьмем тую з іх, дзе косінус падвоенага аргумента выражаецца праз сінус, бо ў дадзеным раўнанні маецца сінус: $cos\, 70x = cos\, 2{\cdot}35x = 1 - 2\, sin^2 35x$. І атрымаем раўнанне $1 - 2\, sin^2 35x - sin\, 35x + 3 = 0$, якое лёгка пераўтворыцца ў такое: $2\, sin^2 35x + sin\, 35x - 4 = 0$. Далей – гл. прыклад 2.

Прыклад **7**. $9(cos\, 4x - cos\, 2x) + 4 = 0$.

Функцыі аднолькавыя, але аргументы іх розныя $4x$ і $2x$. Зноў жа адзін з іх удвая большы за другі. Таму зноў напрошваецца формула косінуса падвоенага аргумента, цяпер праз косінус:

$9(2cos^2 2x - 1 - cos\, 2x) + 4 = 0$. Пасля элементарных пераўтварэнняў: $18cos^2 2x - 9cos\, 2x - 5 = 0$. Далей – гл. прыклад 3.

Прыклад **8**. $3tg\, x - 3ctg\, x + 2\sqrt{3} = 0$.

$tg\, x$ і $ctg\, x$ вылічваюцца не для ўсіх x, таму тыя значэнні x, для якіх $tg\, x$ і $ctg\, x$ не існуюць, трэ будзе адкінуць, калі яны атрымаюцца ў адказе (гэта ўсе пункты акружыны на яе перасячэнні з восямі каардынат: $\frac{\pi n}{2}$, дзе $n \in Z$). Пра гэта карысна падумаць перад пачаткам развязвання. А цяпер за справу.

Тое, што $ctg\, x = \frac{1}{tgx}$, вы ведаеце з азначэнняў гэтых функцый. Дамножыўшы на $tg\, x$ левую і правую часткі раўнання, атрымаем: $3tg^2 x + 2\sqrt{3}\, tg\, x - 3 = 0$. Далей – гл. прыклад 4.

Прыклад **9**. $sin^2 89{,}3x - 2cos\frac{x}{15} - 3sin^2\frac{x}{15}cos\frac{x}{15} + cos^2 89{,}3x = tg\, \pi x \cdot ctg\, \pi x$.

Тое, што выглядае вельмі страшна, звычайна вельмі проста развязваецца. Трэба спакойна прыгледзецца да гэтага страхоцця і можна заўважыць суму $sin^2 89{,}3x + cos^2 89{,}3x$, якая роўная адзінцы, а з другога боку раўнання здабытак $tg\, \pi x \cdot ctg\, \pi x$, таксама роўны адзінцы. Гэтыя дзве адзінкі знішчаюцца. Астатняе пасля дамнажэння на –1 і вынясення множніка $cos\frac{x}{15}$ за дужкі пераўтворыцца ў роўны нулю здабытак двух множнікаў: $cos\frac{x}{15}\left(2 + 3sin^2\frac{x}{15}\right) = 0$. І раўнанне распадаецца на два раўнанні $cos\frac{x}{15} = 0$ або $2 + 3sin^2\frac{x}{15} = 0$. Другое раўнанне відавочна кораняў не мае, бо $sin^2\frac{x}{15}$ не можа быць адмоўным. А з першага атрымаем $\frac{x}{15} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, адкуль $x = 7{,}5\pi + 15\pi k$, дзе $k \in Z$. Гэта ўжо амаль адказ. Амаль – таму што ў раўнанні прысутнічалі тангенс і катангенс, аргументы якіх маюць недапушчальныя значэнні (пункты акружыны на перасячэнні яе з восямі каардынат): $\pi x \neq \frac{\pi n}{2} \Rightarrow x \neq \frac{n}{2}$, дзе $n \in Z$. Атрымалі няроўнасць $7{,}5\pi + 15\pi\, k \neq \frac{n}{2}$, з якой выразім $\pi \neq \frac{n}{15+30k}$. Але паколькі k і n – цэлыя лікі, то дроб $\frac{n}{15+30k}$ уяўляе сабой рацыянальны лік, а лік π – ірацыянальны, таму няроўнасць праўдзіцца для любых цэлых k і n. *Адказ*: $7{,}5\pi + 15\pi k$, дзе $k \in Z$.

Прыклад **10**. $7sin^4\frac{x}{2} - 2sin^2\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2} - cos^4\frac{x}{2} = 0$.

У гэтым раўнанні тры складнікі, якія маюць аднолькавую ступень зменных, калі ў якасці зменнных лічыць $sin\frac{x}{2}$ і $cos\frac{x}{2}$. Такія раўнанні называюць аднароднымі.

Раўнанне з некалькімі зменнымі называецца **аднародным**, калі ўсе яго складнікі маюць аднолькавую ступень зменных.

Такім чынам, перад намі аднароднае раўнанне 4-й ступені адносна $sin\frac{x}{2}$ і $cos\frac{x}{2}$. Падзяліўшы ўсе складнікі такога раўнання на $cos^4\frac{x}{2}$ (гэта й ёсць асноўны прыём развязвання аднародных раўнанняў: дзяленне ўсіх складнікаў на адну са зменных у ступені, роўнай ступені раўнання), атрымаем раўнанне з адной трыганаметрычнай функцыяй:

$$7tg^4\frac{x}{2} - 2tg^2\frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Пераназавем $tg^2\frac{x}{2}$ іншай літарай ($tg^2\frac{x}{2} = y$) і атрымаем квадратнае раўнанне з каранямі $\frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$. Тым самым мы расклалі раўнанне на два раўнанні: $tg^2\frac{x}{2} = \frac{1-2\sqrt{2}}{7}$ або $tg^2\frac{x}{2} = \frac{1+2\sqrt{2}}{7}$. Першае з іх кораняў не мае, бо $\frac{1-2\sqrt{2}}{7}$ – адмоўны лік. Другое ў сваю чаргу распадаецца на два прасцейшыя раўнанні: $tg\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ або $tg\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ (для скарачэння запісаў будзем пісаць: $tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$).

Адсюль $\frac{x}{2} = arctg(\pm\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}) + \pi m$, $x = 2arctg(\pm\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}) + 2\pi m = \pm 2arctg\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}} + 2\pi m, \quad m \in Z.$

Заўвагі:

***а)** выконваючы дзяленне, вы павінны быць перакананы ў тым, што дзеліце не на нуль. Косінус можа быць роўным нулю, калі ён прысутнічае ва ўсіх складніках. Тады на яго дзяліць нельга, а трэба вынесці за дужкі і разглядзець роўны нулю здабытак. У нашым жа* *выпадку, калі дапусціць, што* $\cos\frac{x}{2} = 0$, *то, падставіўшы гэты нуль у дадзенае раўнанне, атрымаем, што і* $\sin\frac{x}{2} = 0$. *Але не існуе такіх лікаў, для якіх сінус і косінус роўныя нулю адначасова. Таму* $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ *і на яго можна спакойна дзяліць.*

***б)** Калі б дзялілі на* $\sin^4\frac{x}{2}$, *то атрымалі б аналагічнае раўнанне з катангенсамі.*

Можна было паспрабаваць іншы спосаб, скарыстаўшы формулы паніжэння ступеняў $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ і $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ (паглядзіце гэты варыянт, затым паўтарыце яго па памяці):

$$7\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)^2 - 2\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2 = 0;$$

$$7\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) - \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2 = 0;$$

Раскрыем дужкі і прывядзем падобныя:

$2\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$. Дыскрымінант роўны 8, таму $\cos x = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$. $\frac{2+\sqrt{2}}{2} > 1$, таму развязваем толькі адно раўнанне $\cos x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Яго корані $x = \pm\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Як бачыце, зноў адказ, атрыманы адным спосабам, нібыта адрозніваецца ад адказу, атрыманага іншым спосабам. Паспрабуем паказаць, што гэтыя лікі аднолькавыя (хто лянуецца сачыць за гэтымі крыху груваснкімі перўтварэннямі, можа іх прапусціць і перайсці адразу да вывучэння наступнага прыкладу).

Пераканаемся спачатку, што лікі, запісанныя адной і другой формулай, адносяцца да адной чвэрці трыганаметрычнай акружыны. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ – лік дадатны, таму $\pm\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ – лікі з першай і чацвёртай чвэрцяў. $\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ – лік дадатны і меншы за адзінку, таму $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ знаходзіцца ў першай чвэрці паміж 0° і 45°. Тады

$2arctg\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ знаходзіцца паміж 0^o і 90^o, гэта значыць у першай чвэрці. Супрацьлеглы лік $-2arctg\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ будзе ў чацвёртай чвэрці. З чвэрцямі, як бачым, поўнае супадзенне і перыяд (2π у адным і другім выпадку) паказвае, што іншых пунктаў на акружыне не будзе. Засталося вылічыць ад аднаго і другога ліку якую-небудзь адну і тую ж трыганаметрычную функцыю (напрыклад, косінус) і пераканацца, што вынік будзе аднолькавы. Выканаем гэта.

$cos\ (\pm arccos\frac{2-\sqrt{2}}{2}) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ – з уласцівасці цотнасці косінуса і па азначэнні арккосінуса. Для вылічэння другога косінуса, акрамя таго, скарыстаем формулы $cos\ 2\varphi = 2cos^2\ \varphi - 1$ і $cos^2\ \varphi = \frac{1}{1+tg^2\varphi}$ (вынік формулы 5).

$$cos\ (\pm 2arctg\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}) = 2cos^2\ (arctg\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}) - 1 =$$

$$2\cdot\frac{1}{1+tg^2(arctg\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}})} - 1 = \frac{2}{1+\left(\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}\right)^2} - 1 = \frac{14}{8+2\sqrt{2}} - 1 =$$

$$\frac{7}{4+\sqrt{2}} - 1 = \frac{7(4-\sqrt{2})}{4^2-(\sqrt{2})^2} - 1 = \frac{4-\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Тое, што лікі ўзятыя з аднолькавых чвэрцяў і ў іх роўныя косінусы, пераконвае, што гэтыя лікі аднолькавыя. Паказаць гэта, як бачыце, бывае зусім няпроста.

Прыклад **11**. $5sin^4\frac{x}{2} - 6sin^2\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2} - 3cos^4\frac{x}{2} + 2 = 0.$

Раўнанне вельмі падобнае на папярэдняе, але тут чатыры складнікі. Тры з іх маюць чацвёртую ступень, а апошні складнік не змяшчае зменных, таму ён мае нулявую ступень. І таму гэтае раўнанне не аднароднае. Але яго можна зрабіць аднародным, калі апошні складнік дамножыць на квадрат трыганаметрычнай адзінкі (квадрат адзінкі і ёсць адзінка, а множанне на адзінку не змяняе ліку). Чаму на квадрат? Таму што трыганаметрычная адзінка змяшчае квадраты сінуса і косінуса, а тут патрабуюцца чацвёртыя ступені. Атрымаем раўнанне:

$$5sin^4\frac{x}{2} - 6sin^2\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2} - 3cos^4\frac{x}{2} + 2(sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2})^2 = 0.$$

Раскрыем дужкі і прывядзем падобныя:

$$7sin^4\frac{x}{2} - 2sin^2\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2} - cos^4\frac{x}{2} = 0.$$

Далей – гл. прыклад 10.

Прыклад **12**. $6sin\ 5x - 8cos\ 5x = 5$.

У раўнанні тры складнікі, два з іх маюць першую ступень, адзін – нулявую, таму раўнанне не аднароднае. Пры жаданні яго можна зрабіць аднародным, скарыстаўшы формулы сінуса і косінуса падвоенага аргумента, якія павышаюць ступені складнікаў, і дамножыўшы пяцёрку на трыганаметрычную адзінку з адпаведным аргументам. Прасочым напачатку гэты шлях.

а) $6sin\ 2\cdot 2{,}5x - 8cos\ 2\cdot 2{,}5x = 5 \Leftrightarrow 12sin\ 2{,}5x\ cos\ 2{,}5x - 8cos^2\ 2{,}5x + 8sin^2\ 2{,}5x = 5\ sin^2\ 2{,}5x + 5\ cos^2\ 2{,}5x$ (ужо раўнанне аднародае) $\Leftrightarrow$ $3sin^2\ 2{,}5x + 12sin\ 2{,}5x\ cos\ 2{,}5x - 13\ cos^2\ 2{,}5x = 0$ (пераконваемся, што $cos\ 2{,}5x$ за дужкі не выносіцца і дзелім на $cos^2\ 2{,}5x$) $\Leftrightarrow$ $3tg^2\ 2{,}5x + 12tg\ 2{,}5x - 13 = 0$ (D/4 = 75) $\Leftrightarrow$ $tg\ 2{,}5x = \frac{-6\pm\sqrt{75}}{3}$ $\Leftrightarrow$ $2{,}5x = arctg\frac{-6\pm\sqrt{75}}{3} + \pi n$ $\Leftrightarrow$ $x = 0{,}4arctg\left(-2\pm\frac{5}{3}\sqrt{3}\right) + 0{,}4\pi n$ – гэта *адказ*.

(Знак $\Leftrightarrow$ "раўназначна" выкарыстоўваўся, каб падкрэсліць, што ўсе пераўтварэнні былі раўназначнымі, пры якіх новае раўнанне мае дакладна тыя самыя корані.)

Зараз пашукаем іншыя шляхі развязвання такога раўнання. І не будзем маркоціцца, калі новы адказ не будзе падобным на ўжо атрыманы.

б) Можна было адразу скарыстаць формулы 37-38, якія выражаюць сінус і косінус праз тангенс палавіннага аргумента: $sin\ \alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ і $cos\ \alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$. Лёгка пераканацца, што лікі, для якіх тангенс палавіннага аргумента не існуе ($5x = \pi + 2\pi n$, $n\in Z$), не з'яўляюцца коранямі раўнання, таму гэтыя формулы можна (!) скарыстоўваць. Атрымалі б:

$6sin\ 5x - 8cos\ 5x = 5 \Leftrightarrow \dfrac{12tg\dfrac{5x}{2}}{1+tg^2\dfrac{5x}{2}} - 8\dfrac{1-tg^2\dfrac{5x}{2}}{1+tg^2\dfrac{5x}{2}} = 5$ (замена $tg\ \dfrac{5x}{2}$ $= t$ і дамнажэнне на $1 + t^2$) $\Leftrightarrow$ $12t - 8 + 8t^2 = 5 + 5t^2$ $\Leftrightarrow 3\ t^2 + 12t - 13 = 0$ (атрымалі тое ж, што і ў варыянце ***а***).

в) Пры знаёмстве з формуламі 7-10 (трыганаметрычныя функцыі сумы ці рознасці двух аргументаў) было паказана пераўтварэнне выразу $asin\ x + bcos\ x$ у выраз з адной трыганаметрычнай функцыяй. Тут як раз той выпадак, дзе гэтае пераўтварэнне можна скарыстаць.

$6sin\ 5x - 8cos\ 5x = 5$ (дзелім на 10, каб атрымаць каэфіцыэнты, сума квадратаў якіх роўная адзінцы) $\Leftrightarrow$ $0{,}6sin\ 5x - 0{,}8cos\ 5x = 0{,}5$ (уводзім новую зменную p, для якой $sin\ p = 0{,}6$, $cos\ p = 0{,}8$; тады $p = arcsin\ 0{,}6$ або $p = arccos\ 0{,}8$ або $p = arctg\dfrac{3}{4}$) $\Leftrightarrow sin\ p\ sin\ 5x - cos\ p\ cos\ 5x = 0{,}5$ $\Leftrightarrow cos\ p\ cos\ 5x - sin\ p\ sin\ 5x = -0{,}5 \Leftrightarrow cos\ (5x + p) = -\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow 5x + p = \pm arcccos\ (-\dfrac{1}{2}) + 2\pi n = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $\Leftrightarrow$ $x = -\dfrac{1}{5}\ p \pm \dfrac{2\pi}{15} + \dfrac{2}{5}\pi n \Leftrightarrow$ $x = -\dfrac{1}{5}\ arctg\dfrac{3}{4}\ \pm\dfrac{2\pi}{15} + \dfrac{2}{5}\pi n$, $n \in Z$. Пераконваць, што атрыманыя лікі тыя ж, што і ў варыянце ***а***, ужо не будзем.

<u>Прыклад **13**</u>. $3sin\ x + 14cos^3\ x - 21sin\ x\ cos^2\ x - 2cos\ x = 0$.

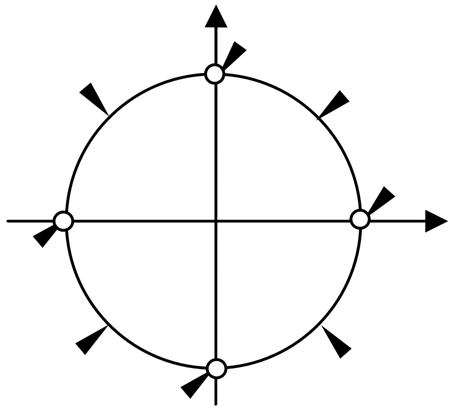
Калі складнікаў 4, тады можна паспрабаваць раскласці выраз на множнікі групоўкай па два. Тут гэтая ідэя пройдзе: $(3sin\ x - 21sin\ x\ cos^2\ x) + (14cos^3\ x - 2cos\ x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $3sin\ x(1 - 7cos^2\ x) - 2cos\ x(1 - 7cos^2\ x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(3sin\ x - 2cos\ x)(1 - 7cos^2\ x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $3sin\ x - 2cos\ x = 0$ або $1 - 7cos^2\ x = 0$. У выніку раўнанне распалася на два больш простыя раўнанні. Першае з іх – аднароднае першай ступені – развязваецца дзяленнем на $cos\ x$ ($3tg\ x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $tg\ x = \dfrac{2}{3}$ $\Leftrightarrow x = arctg\ \dfrac{2}{3} + \pi v$, $v \in Z$). Другое зводзіцца да двух працейшых: $cos\ x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{7}$, развязкі якіх можна запісаць адной роўнасцю (пераканайцеся ў тым, паглядзеўшы на адпаведныя пункты трыганаметрычнай акружыны) $x = \pm arccos\dfrac{\sqrt{7}}{7} + \pi u$, $u \in Z$. *Адказ*: $arctg\ \dfrac{2}{3} + \pi v$; $\pm arccos\dfrac{\sqrt{7}}{7} + \pi u$; v, $u \in Z$.

Калі ў ваш розум не патрапіць ідэя раскладання на множнікі групоўкай, тады вы будзеце шукаць іншы спосаб дабрацца да адказу. А хто шукае, той знаходзіць. Прыгледзімся да гэтых чатырох складнікаў: два з іх маюць першую ступень, іншыя два – трэцюю. Раўнанне не аднароднае. Але гэтая рознасць паказнікаў у дзве адзінкі дазваляе зрабіць яго аднародным, калі складнікі першай ступені дамножыць на трыганаметрычную адзінку: $3\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 14\cos^3 x - 21\sin x \cos^2 x - 2\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin^3 x + 3\sin x \cos^2 x + 14\cos^3 x - 2\cos x\sin^2 x - 2\cos^3 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^3 x - 2\cos x\sin^2 x - 18\sin x\cos^2 x + 12\cos^3 x = 0$ (вось яно, аднароднае раўнанне, але ж трэцяй ступені; $\cos x$ за дужкі не выносіцца, – дзелім на $\cos^3 x$) $\Leftrightarrow 3tg^3 x - 2tg^2 x - 18tg\, x + 12 = 0$. Замена $tg\, x = t$: $3t^3 - 2t^2 - 18t + 12 = 0$. Магчыма, цяпер тая ж ідэя групоўкі ўжо заскочыць у ваш розум: $(3t^3 - 2t^2) - (18t - 12) = 0 \Leftrightarrow t^2(3t - 2) - 6(3t - 2) = 0 \Leftrightarrow (3t - 2)(t^2 - 6) = 0$. Атрымалі: $tg\, x = \frac{2}{3}$ або $tg\, x = \pm\sqrt{6}$. *Адказ*: $arctg\,\frac{2}{3} + \pi m; \pm arctg\sqrt{6} + \pi n;\ m, n \in Z$.

Прыклад **14**. $\sin 5x \sin 3x = \sin x \sin 7x$.

Для развязвання такога раўнання прыдзецца карыстацца формуламі 22-28, якія дазваляюць выконваць дзеянні з трыганаметрычнымі функцыямі. Напачатку перамножым сінусы ў абедзвюх частках раўнання па формуле $\sin x \sin y = \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{-2}$ (пра мінус не забылі?), затым прыдзецца карыстацца адваротнай формулай для адымання косінусаў $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ (той жа мінус!). Прасочым за пераўтварэннямі.

$\sin 5x \sin 3x = \sin x \sin 7x \Leftrightarrow \frac{\cos 8x - \cos 2x}{-2} = \frac{\cos 8x - \cos 6x}{-2} \Leftrightarrow$ $\cos 6x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow -2\sin 4x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0$ або $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$ $4x = \pi n$ або $2x = \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{4}$ або $x = \frac{\pi k}{2}$ $(n, k \in Z)$.



Малюнак 38

Перш чым запісваць адказ, кожны раз карысна глянуць на атрыманыя пункты на акружыне. $\frac{\pi n}{4}$ – гэта 8 пунктаў, паказаных стрэлкамі на малюнку 38, а $\frac{\pi k}{2}$ – гэта 4 пункты, паказаных белымі кружочкамі. Як бачым, белыя кружочкі новых пунктаў не дадаюць, таму ў адказе дастаткова запісаць $\frac{\pi n}{4}$, дзе $n \in Z$.

<u>Прыклад **15**</u>. $\dfrac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$

Дроб роўны адзінцы тады, калі яго лічнік і назоўнік роўныя, – але не нулі! Атрымоўваем сістэму:

$$\begin{cases} \cos x + \sin 2x = \cos 3x \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$$

Развяжам першае раўнанне *cos x* – *cos* 3*x* + *sin* 2*x* = 0 (пачнем з адымання косінусаў) $\Leftrightarrow$ $-2\sin 2x \sin(-x) + \sin 2x = 0$ $\Leftrightarrow$ $\sin 2x(2\sin x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\sin 2x = 0$ або $2\sin x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $2x = \pi n$ або $\sin x = -\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi n}{2}$ або $x = (-1)^k(-\frac{\pi}{6}) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$ ($n, k \in Z$).

Засталося разабрацца з другой часткай сістэмы, з няроўнасцю. Для чаго найперш адзначым, што атрыманы развязак раўнання ўтрымлівае 6 пунктаў трыганаметрычнай акружыны: $\frac{\pi n}{2}$ – гэта 4 пункты на перасячэнні акружыны з восямі; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$ – гэта 2 пункты, сінусы якіх роўныя $-\frac{1}{2}$. На першым перыядзе $[0; 2\pi)$ каардынаты гэтых пунктаў наступныя: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ і $\frac{11\pi}{6}$. Калі камусьці лягчэй разбірацца праз градусы, то лікі стануць такім: 0^o, 90^o, 180^o, 210^o, 270^o і 330^o. Пры множанні на 3 лікі пераўтворацца ў такія: 0, $\frac{3\pi}{2}$, 3π, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ і $\frac{11\pi}{2}$ (або 0^o, 270^o, 540^o, 630^o, 810^o і 990^o).

Пункты акружыны з каардынатамі $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$ і $\frac{11\pi}{2}$ (або 270°, 630°, 810° і 990°) ляжаць на восі ардынат і таму іх косінусы роўныя нулю. Па гэтай прычыне 4 лікі з першага перыяду ($\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ і $\frac{11\pi}{6}$) трэба адкінуць. Застануцца толькі 0 і π. Канчатковы *адказ*: $x = \pi n$, $n \in Z$.

Прыклад **16**. $4sin\,(5x^2+3x+1) - 2sin^4\,(6x-1) - cos\,5x = 10$ $(= 5)$.

Апошнімі лікамі тут зададзены два раўнанні, нібыта вельмі складаныя і нібыта вельмі падобныя. Розніца ўсё ж паміж імі ёсць. А прывідная складанасць няхай вас не пужае: тое, што страшней выглядае, часта вельмі проста развязваецца. Пачнем з таго, што значэнні сінуса і косінуса атрымліваюцца з інтэрвалу $[-1;\ 1]$, што б там пад сінусам-косінусам ні стаяла. Таму: $-4 \le 4sin\,(5x^2+3x+1) \le 4$, $-2 \le -2\,sin^4\,(6x-1) \le 0$ (да нуля, бо тут цотная ступень сінуса), $-1 \le -\,cos\,5x \le 1$. Такім чынам, пры складанні трох дадзеных выразаў можа атрымацца лік з прамежку $[-7;\ 5]$. І калі ў другой частцы раўнання стаіць лік, які не належыць гэтаму прамежку, то адказ бачны адразу: раўнанне кораняў не мае.

І прыгледзімся да другога раўнання "... = 5". Пры складанні трох дадзеных выразаў 5 нібыта можа атрымацца. Але! 5 атрымаецца толькі тады, калі гэтыя выразы прымаюць свае найбольшыя значэнні разам – пры адным і тым жа значэнні аргумента x. $sin\,(6x-1) = 0$ пры $x = \frac{1+\pi n}{6}$, а $-cos\,5x = 1$ пры $x = \frac{\pi+2\pi k}{5}$. Высветлім, пры якіх цэлых n і k праўдзіцца роўнасць $\frac{1+\pi n}{6} = \frac{\pi+2\pi k}{5}$. Для гэтага выразім з яе лік π. $5+5\pi n = 6\pi+12\pi k \Leftrightarrow \pi = \frac{5}{6+12k-5n}$. Апошняя роўнасць немагчымая, бо π – лік ірацыянальны, а дроб у другой частцы пры цэлых n і k – лік рацыянальны. Атрымліваецца, што $-2sin^4\,(6x-1)$ і $-cos\,5x$ не могуць прымаць сваіх найбольшых значэнняў адначасова, таму іх сума заўсёды меншая за 1 і пры складанні трох дадзеных выразаў ніколі не атрымаецца 5. *Адказ*: раўнанне кораняў не мае.

Прыклад **17**. $3sin\,(10x + \frac{\pi}{8}) - 5sin\,(4x - \frac{11\pi}{4}) = 8$.

Па ідэі папярэдняга прыкладу можна заўважыць, што выраз левай часткі раўнання можа прымаць значэнні з прамежку $[-8;\ 8]$, і найбольшае значэнне 8 атрымаецца толькі калі $sin\,(10x + \frac{\pi}{8}) = 1$ і $sin\,(4x - \frac{11\pi}{4}) = -1$. Развяжам атрыманую сістэму з двух раўнанняў. З першага: $10x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, адкуль $x = \frac{3\pi}{80} + \frac{\pi n}{5}$. З другога: $4x - \frac{11\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, адкуль $x = \frac{9\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$. Цяпер трэба разабрацца, якія з атрыманых “іксоў” з’яўляюцца коранямі **кожнага** з двух раўнанняў, бо толькі тады гэта будзе развязак сістэмы. Прыраўняем атрыманыя выразы: $\frac{3\pi}{80} + \frac{\pi n}{5} = \frac{9\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$. Дамножым на 80 і падзелім на π: $3+16n = 45+40k \Leftrightarrow 16n = 42+40k \Leftrightarrow 8n = 21+20k$. Апошняя роўнасць немагчымая ні пры якіх цэлых n і k, бо $8n$ – лік цотны, а $21+20k$ – лік няцотны. *Адказ*: раўнанне не мае кораняў.

<u>Прыклад **18**</u>. $2cos\,3x - 13sin\,(2x + \frac{\pi}{6}) = 15$.

Ужо мы прывыклі ацэньваць значэнні выразаў, якія ўтрымліваюць сінусы і косінусы, таму заўважаем, што і гэтае раўнанне раўназначна сістэме двух раўнанняў:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = -1. \end{cases}$$

Корані першага $x = \frac{2\pi k}{3}$ і корані другога $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$ прыраўняем, каб вызначыць агульныя корані гэтых раўнанняў. Атрымаем: $\frac{2\pi k}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi n \Leftrightarrow 2k = 3n-1 \Leftrightarrow k = \frac{3n-1}{2}$. Каб лік k атрымаўся цэлым, якім ён і павінен быць, трэба лік n браць няцотным, $n = 2m+1$, дзе m – цэлы лік. Тады $k = \frac{3(2m+1)-1}{2} = 3m+1$. Падставіўшы $k = 3m+1$ у формулу $x = \frac{2\pi k}{3}$ (або $n = 2m+1$ у формулу $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$ – гэта карысна зрабіць для самакантролю), атрымаем $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, дзе $m \in Z$. Такі *адказ*.

<u>Прыклад **19**</u>. $sin^7 x + cos^{12} x = 1$.

Раўнанне крыху нагадвае асноўную трыганаметрычную тоеснасць і таму натуральна на яе азірнуцца. Калі пункты акружыны браць не на каардынатных восях ($x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$), тады $|sin\, x| < 1$ і $|cos\, x| < 1$. У гэтым выпадку $sin^7 x < sin^2 x$ і $cos^{12} x < cos^2 x$, таму $sin^7 x + cos^{12} x < sin^2 x + cos^2 x$, $sin^7 x + cos^{12} x < 1$. Такім чынам, дадзенае раўнанне не можа мець кораняў нідзе, акрамя як у пунктах акружыны на восях. А наяўнасць кораняў у гэтых чатырох пунктах можна вызначыць простымі вылічэннямі, тры з іх падыйдуць. *Адказ*: πm; $\frac{\pi}{2} + n\pi$; $m, n \in Z$.

<u>Прыклад **20**</u>. $\sqrt{2}\, sin\, \pi x + \sqrt{2}\ cos\, \pi x = 16x^2 - 72x + 83$.

Здаецца, тут зусім нешта неймавернае. Але заўважым, што сінус і косінус з аднолькавымі аргументамі і ўспомнім, як такія выразы пераўтвараюцца ў выразы з адной трыганаметрычнай функцыяй: $\sqrt{2}\, sin\ \pi x + \sqrt{2}\ cos\ \pi x = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} sin\ \pi x + \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \pi x) = 2(sin\frac{\pi}{4} sin\ \pi x + cos\frac{\pi}{4} cos\ \pi x) = 2cos(\pi x - \frac{\pi}{4})$. У раўнаннях з адной трыганаметрычнай функцыяй разбірацца, што ні кажы, прасцей.

Атрымалі такое раўнанне: $2cos(\pi x - \frac{\pi}{4}) = 16x^2 - 72x + 83$. У левай яго частцы трыганаметрычны выраз, які прымае значэнні з прамежку [–2; 2]. У правай – квадратны трохсклад, графік якога – парабала з галінкамі ўверх. Каб вызначыць мноства яго значэнняў, трэба вылічыць каардынаты вяршыні парабалы: $x_{вяршыні} = -\frac{b}{2a} = \frac{9}{4}$, тады $y_{вяршыні} = y(\frac{9}{4}) = 2$. 2 – гэта найбольшае значэнне левай часткі і найменшае значэнне правай часткі раўнання. Калі раўнанне і мае корані, то яны могуць быць толькі там, дзе гэтыя значэнні супадаюць. А супадаць яны могуць толькі пры $x = \frac{9}{4}$, бо іншыя пункты парабалы вышэй. $2cos(\frac{9}{4}\pi - \frac{\pi}{4}) = 2cos\, 2\pi = 2$. *Адказ*: $\frac{9}{4}$.

Хопіць прыкладаў. Далей трэба набываць практыку развязвання такіх раўнанняў. Асноўныя прыёмы на гэтых дваццаці прыкладах паказаны, зараз трэба вучыцца імі варыятыўна карыстацца. Поспехаў!

VI-2. Трыганаметрычныя няроўнасці

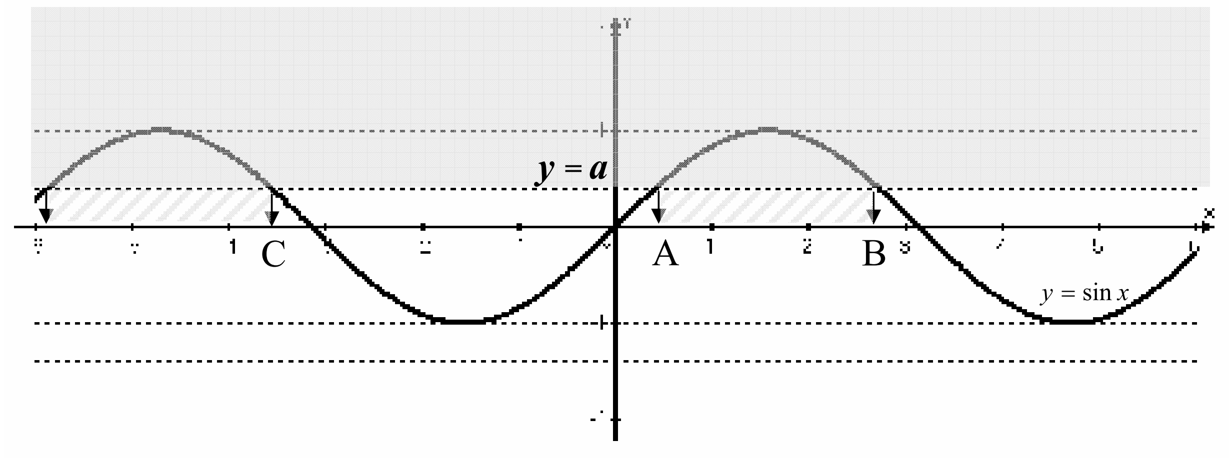
Трыганаметрычнымі няроўнасцямі называюць такія няроўнасці, якія ўтрымліваюць зменную (ці некалькі зменных) пад знакамі трыганаметрычных функцый. Развязванне трыганаметрычных няроўнасцяў так ці інакш зводзіцца да развязвання прасцейшых трыганаметрычных няроўнасцяў. Таму найперш будзем вучыцца развязваць прасцейшыя трыганаметрычныя няроўнасці – няроўнасці кшталту $sin\ x$ ($cos\ x$, $tg\ x$, $ctg\ x$) < (>, ≤, ≥) a, дзе a – нейкі лік.

Развязваюць кожную з шаснаццаці прасцейшых трыганаметрычных няроўнасцяў з апорай на трыганаметрычную акружыну ці на адпаведны графік. На думку аўтара, з апорай на графік лепш, бо на акружыне кожны пункт мае бясконцае мноства каардынат і заўсёды ёсць праблема, якую з гэтых каардынат выбраць для запісу асноўнага прамежку. А на графіку кожны пункт мае адну абсцысу і заблытацца ў ліках там цяжэй.

Відавочна, што няроўнасці кшталту $sin\ x < -1$, $cos\ x < -1$, $sin\ x > 1$, $cos\ x > 1$, $sin\ x \le -7$, $cos\ x \le -1{,}2$, $sin\ x \ge \frac{\pi}{3}$, $cos\ x \ge \frac{\sqrt{6}}{2}$ развязкаў не маюць (матэматыкі яшчэ кажуць: маюць пустое мноства развязкаў).

Гэтак жа відавочна, што развязкам няроўнасцяў кшталту $sin\ x \ge -1$, $cos\ x \ge -1$, $sin\ x \le 1$, $cos\ x \le 1$, $sin\ x > -7$, $cos\ x > -1{,}2$, $sin\ x < \frac{\pi}{3}$, $sin\ x \le \frac{\pi}{3}$, $cos\ x < \frac{\sqrt{6}}{2}$ ёсць мноства ўсіх рэчаісных лікаў $(-\infty; \infty)$.

Для развязвання іншых няроўнасцяў разгледзім адпаведныя графікі.



Малюнак 39

На малюнку 39 паказаны графікі $y = sin\ x$ (сінусоіда) і $y = a$ (пункцірныя прамыя) для $a < -1$, $a = -1$, $a = 1$, $a > 1$ і $-1 < a < 1$ (тлусцейшая пункцірная лінія). Азіраючыся на гэтыя графікі, можна сказаць, што няроўнасць $\sin x \geq 1$ мае развязкамі асобныя пункты $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$. Няроўнасць $\sin x \geq 1$ раўназначная раўнанню $\sin x = 1$, бо сінус ліку не можа прымаць значэнняў, большых за 1.

Гэтак жа няроўнасць $\sin x \leq -1$ раўназначная раўнанню $\sin x = -1$, бо сінус ліку не можа прымаць значэнняў, меншых за –1, таму мноства развязкаў гэтай няроўнасці складаецца з асобных пунктаў $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$. З адзінкамі тым самым пакончылі.

Калі ж $-1 < a < 1$, то прамая $y = a$ перасякае сінусоіду ў пунктах, абсцысы якіх з'яўляюцца коранямі раўнання $\sin x = a$ (помніце $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$, $k \in Z$?). Для развязвання няроўнасці $\boldsymbol{\sin x > a}$ трэба выбраць прамежкі, на якіх сінусоіда вышэй за прамую (шэрая частка плоскасці). Адзін з такіх прамежкаў AB, ён мае канцы $\arcsin a$ і $\pi - \arcsin a$ (чаму так, – патлумачана ў раздзеле “Прасцейшыя трыганаметрычныя раўнанні”). Іншыя прамежкі атрымліваюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў сінуса, таму агульны развязак будзе выглядаць так: $\boldsymbol{(\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z}$.

Адпаведна развязак няроўнасці $\boldsymbol{\sin x \geq a}$ мае такі выгляд: $\boldsymbol{[\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n],\ n \in Z}$.

Для развязвання няроўнасці $\boldsymbol{\sin x < a}$ трэба выбраць прамежкі, на якіх сінусоіда ніжэй за прамую. Адзін з такіх прамежкаў CA, ён мае канцы $-\pi - \arcsin a$ і $\arcsin a$. Іншыя прамежкі атрымліваюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў сінуса, таму агульны развязак будзе выглядаць так: $\boldsymbol{(-\pi - \arcsin a + 2\pi n;\ \arcsin a + 2\pi n),\ n \in Z}$.

Адпаведна развязак няроўнасці $\boldsymbol{\sin x \leq a}$ мае такі выгляд: $\boldsymbol{[-\pi - \arcsin a + 2\pi n;\ \arcsin a + 2\pi n],\ n \in Z}$.

На малюнку 40 паказаны графікі $y = \cos x$ (сінусоіда) і $y = a$ (пункцірныя прамыя) для $a = -1$, $a = 1$ і $-1 < a < 1$ (тлусцейшая пункцірная лінія). Азіраючыся на гэтыя графікі, можна сказаць, што няроўнасць $\cos x \geq 1$ мае развязкамі асобныя пункты $x = 2\pi n$, $n \in Z$. Няроўнасць $\cos x \geq 1$ раўназначная раўнанню $\cos x = 1$, бо косінус ліку не можа прымаць значэнняў, большых за 1.

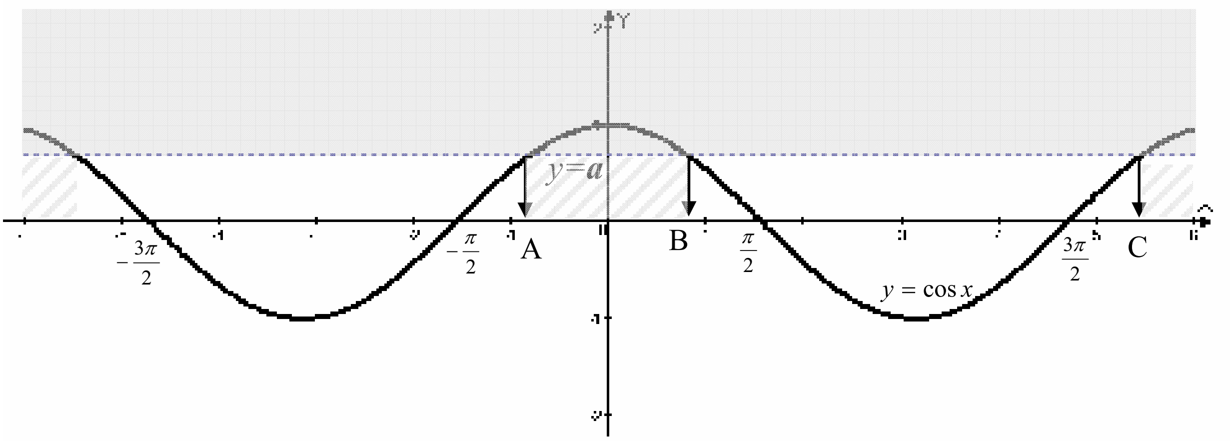
Гэтак жа няроўнасць $\cos x \leq -1$ раўназначная раўнанню $\cos x = -1$, бо косінус ліку не можа прымаць значэнняў, меншых за –1, таму мноства развязкаў гэтай няроўнасці складаецца з асобных пунктаў $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. З адзінкамі тым самым пакончылі.

Калі ж $-1 < a < 1$, то прамая $y = a$ перасякае графік $y = \cos x$ у пунктах, абсцысы якіх з’яўляюцца коранямі раўнання $\cos x = a$ (помніце: $x = \pm\arccos a + 2k\pi$, $k\in Z$?). Для развязвання няроўнасці $\boldsymbol{\cos x > a}$ трэба выбраць прамежкі, на якіх сінусоіда вышэй за прамую (шэрая частка плоскасці). Адзін з такіх прамежкаў AB, ён мае канцы $-\arccos a$ і $\arccos a$ (чаму так, – патлумачана ў раздзеле “Прасцейшыя трыганаметрычныя раўнанні”). Іншыя прамежкі атрымліваюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў косінуса, таму агульны развязак будзе выглядаць так: $\boldsymbol{(-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n),\ n\in Z}$.

Адпаведна развязак няроўнасці $\boldsymbol{\cos x \geq a}$ мае такі выгляд: $\boldsymbol{[-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n],\ n\in Z}$.

Для развязвання няроўнасці $\boldsymbol{\cos x < a}$ трэба выбраць прамежкі, на якіх сінусоіда ніжэй за прамую. Адзін з такіх прамежкаў BC, ён мае канцы $\arccos a$ і $-\arccos a + 2\pi$. Іншыя прамежкі атрымліваюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў косінуса, таму агульны развязак будзе выглядаць так: $\boldsymbol{(\arccos a + 2\pi n;\ -\arccos a + 2\pi + 2\pi n),\ n\in Z}$.

Адпаведна развязак няроўнасці $\boldsymbol{\cos x \leq a}$ мае такі выгляд: $\boldsymbol{[\arccos a + 2\pi n;\ -\arccos a + 2\pi + 2\pi n],\ n\in Z}$.

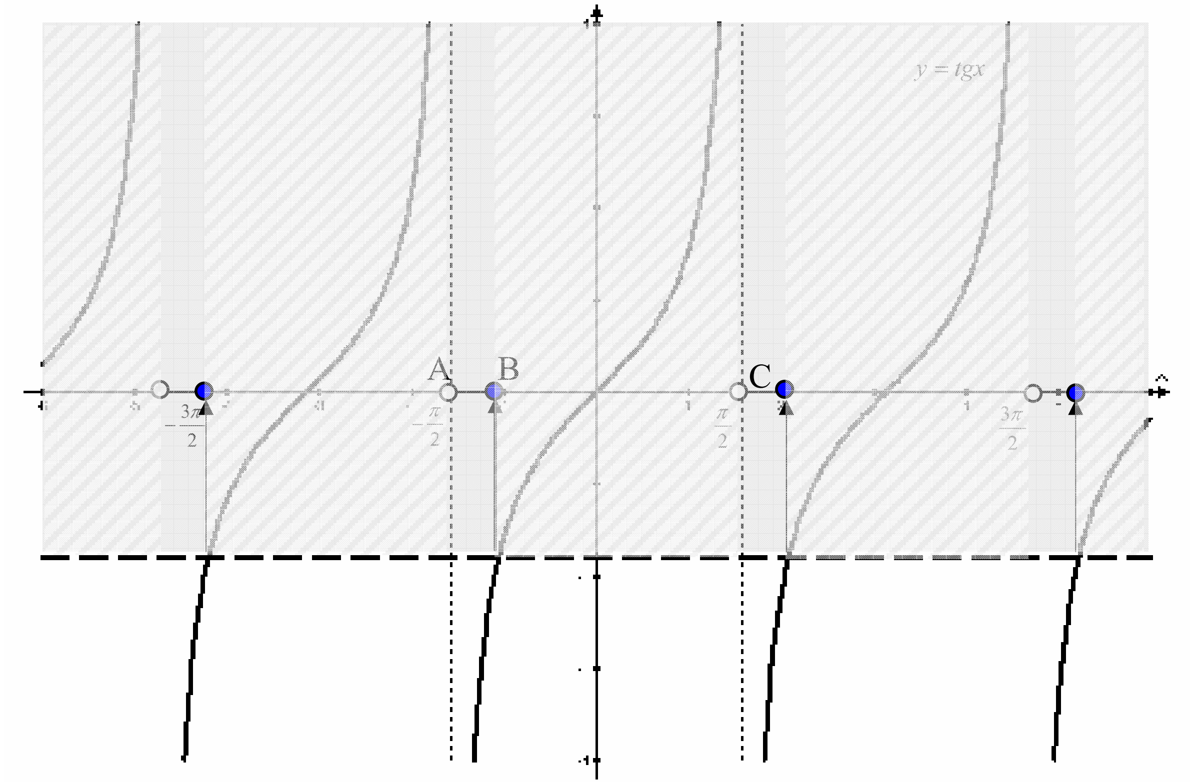


Малюнак 40

Тангенс і катангенс – функцыі неабмежаваныя, таму там не трэба выдзяляць нейкіх асобных лікаў, усе лікі ў гэтым сэнсе аднолькавыя.

На малюнку 41 паказаны графікі $y = tg\, x$ (тангенсоіда) і $y = a$ (пункцірная прамая). Для развязвання няроўнасці $\boldsymbol{tg\, x > a}$ трэба выбраць прамежкі, на якіх тангенсоіда вышэй за прамую (шэрая частка плоскасці). Адзін з такіх прамежкаў BC, ён мае канцы $arctg\, a$ і $\frac{\pi}{2}$. Іншыя прамежкі атрымліваюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў тангенса, таму агульны развязак будзе выглядаць так: $\boldsymbol{(arctg\ a + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n)}$, $\boldsymbol{n \in \mathbf{Z}}$.

Адпаведна развязак няроўнасці $\boldsymbol{tg\ x \geq a}$ мае такі выгляд: $\boldsymbol{[arctg\ a + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n)}$, $\boldsymbol{n \in \mathbf{Z}}$. Пункты $\frac{\pi}{2} + \boldsymbol{\pi n}$ не могуць быць развязкамі такіх раўнанняў, бо тангенсы гэтых лікаў не існуюць.



Малюнак 41

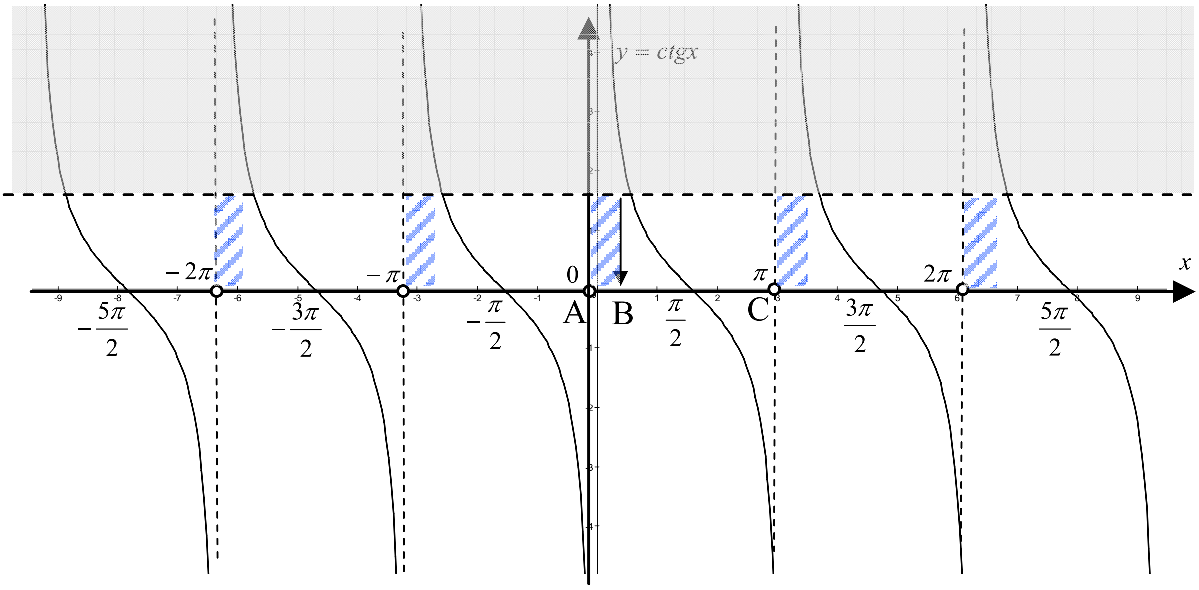
Для развязвання няроўнасці $\boldsymbol{tg\ x < a}$ трэба выбраць прамежкі, на якіх тангенсоіда ніжэй за прамую (нефарбаваная частка плоскасці). Адзін з такіх прамежкаў AB, ён мае канцы $-\frac{\pi}{2}$ і $arctg\ a$. Іншыя прамежкі атрымліваюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў тангенса, таму агульны развязак будзе выглядаць так: $\boldsymbol{(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ arctg\ a + \pi n)}$, $\boldsymbol{n \in \mathbf{Z}}$.

Адпаведна развязак няроўнасці $\boldsymbol{tg\ x \leq a}$ мае такі выгляд: $\boldsymbol{(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ arctg\ a + \pi n]}$, $\boldsymbol{n \in \mathbf{Z}}$ (зноў звярніце ўвагу на дужкі).

На малюнку 42 паказаны графікі $y = ctg\ x$ і $y = a$ (пункцірная прамая). Для развязвання няроўнасці $\boldsymbol{ctg\ x > a}$ трэба выбраць прамежкі, на якіх катангенсоіда вышэй за прамую (фарбаваная частка плоскасці).

Адзін з такіх прамежкаў AB, ён мае канцы 0 і *arcctg a*. Іншыя прамежкі атрымліваюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў катангенса, таму агульны развязак будзе выглядаць так: **(*πn*; *arcctg a* + *πn*), *n*∈Z**.

Адпаведна развязак няроўнасці $\boldsymbol{ctg\ x \geq a}$ мае такі выгляд: **(*πn*; *arcctg a* + *πn*], *n*∈Z**. Пункты ***πn*** не могуць быць развязкамі такіх раўнанняў, бо катангенсы гэтых лікаў не існуюць.



Малюнак 42

Для развязвання няроўнасці $\boldsymbol{ctg\ x < a}$ трэба выбраць прамежкі, на якіх тангенсоіда ніжэй за прамую $y = a$ (нефарбаваная частка плоскасці). Адзін з такіх прамежкаў BC, ён мае канцы *arcctg a* і *π*. Іншыя прамежкі атрымліваюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў катангенса, таму агульны развязак будзе выглядаць так: **(*arcctg a* + *πn*; π + *πn*), *n*∈Z**.

Адпаведна развязак няроўнасці $\boldsymbol{ctg\ x \leq a}$ мае такі выгляд: **[*arcctg a* + *πn*; π + *πn*), *n*∈Z** (зноў звярніце ўвагу на дужкі).

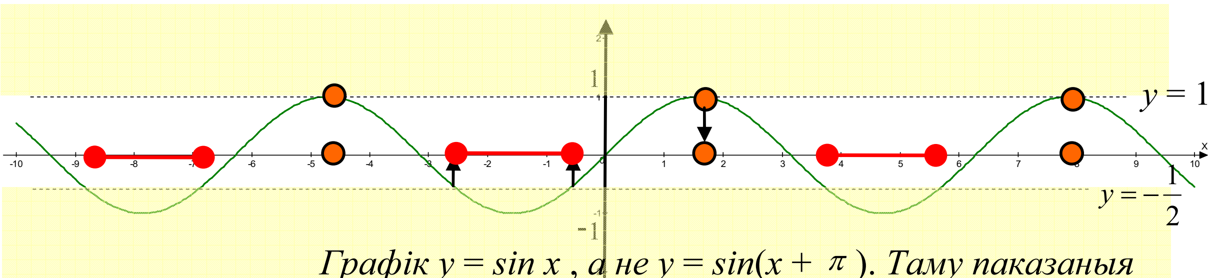
Цяпер вы ўмееце развязваць прасцейшыя трыганаметрычныя няроўнасці. Іншыя няроўнасці тым ці іншым спосабам будуць зводзіцца да прасцейшых. Паглядзім на прыкладах, як гэта робіцца. Паколькі ўсё гэта вельмі падобна на тое, што было ў раўнаннях, то абмяжуемся меншай колькасцю прыкладаў.

<u>Прыклад **1**</u>. $cos\,(2x + \frac{\pi}{3}) + sin\,(x + \frac{\pi}{6}) \leq 0.$

Прыгледзеўшыся, заўважым, што $2x + \frac{\pi}{3} = 2(x + \frac{\pi}{6})$. Таму можна скарыстаць адну з формул косінуса падвоенага аргумента – тую з іх, дзе косінус падвоенага аргумента выражаецца праз сінус.

$cos\,(2x + \frac{\pi}{3}) + sin\,(x + \frac{\pi}{6}) \le 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2\,sin^2\,(x + \frac{\pi}{6}) + sin\,(x + \frac{\pi}{6}) \le 0$. Цяпер заменай $sin\,(x + \frac{\pi}{6}) = s$, атрымаем алгебраічную няроўнасць: $1 - 2\,s^2 + s \le 0 \;\Leftrightarrow\; 2\,s^2 - s - 1 \ge 0$. $-0{,}5$ і 1 – корані трохскладу $2\,s^2 - s - 1$ (праз гэтыя пункты восі абсцыс праходзіць парабала з галінкамі ўверх), таму апошняя няроўнасць праўдзіцца для $s \in (-\infty;-0{,}5] \cup [1;\,\infty)$. Запісаўшы гэтыя прамежкі ў выглядзе няроўнасцяў $s \le -0{,}5$ або $s \ge 1$ і выканаўшы адваротную замену, атрымаем дзве прасцейшыя няроўнасці $sin\,(x + \frac{\pi}{6}) \le -0{,}5$ або $sin\,(x + \frac{\pi}{6}) \ge 1$. Апошняя няроўнасць раўназначная раўнанню $sin\,(x + \frac{\pi}{6}) = 1$, бо сінусаў, большых за 1, не бывае. Яго развязак: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Далей можна паглядзець на графікі (мал. 43).



Графік $y = sin\,x$, а не $y = sin(x + \frac{\pi}{6})$. Таму паказаныя тут развязкі трэба адсунуць на $\pi/6$ улева.

Малюнак 43

Няроўнасць $sin\,(x + \frac{\pi}{6}) \le -\frac{1}{2}$ задае прамежкі. Адзін з іх (бліжэйшы да нуля) $[-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{\pi}{6}]$, астатнія – праз перыяд сінуса. Такім чынам, $x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k] \cup \{\frac{\pi}{2} + 2\pi m\}$. Каб атрымаць адказ, засталося ўсе названыя тут лікі (канцы прамежкаў) паменшыць на $\frac{\pi}{6}$. *Адказ*: $[-\pi + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k] \cup \{\frac{\pi}{3} + 2\pi m\}$; $k, m \in$ Z.

<u>Прыклад **2**</u>. $\cos\,(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin\,(x + \frac{\pi}{6}) > 0$.

У параўнанні з прыкладам 1 тут зменены толькі знак няроўнасці. Можна карыстацца тымі ж прыёмамі і тым жа малюнкам 43. Няроўнасць $2\,s^2 - s - 1 < 0$ мае развязак (–0,5; 1). Запісаўшы гэты прамежак у выглядзе двайной няроўнасці $-0{,}5 < s < 1$і выканаўшы адваротную замену, атрымаем сістэму няроўнасцяў $-0{,}5 < x + \frac{\pi}{6} < 1$. Цяпер нам трэба выбраць тыя часткі сінусоіды, якія патрапляюць паміж прамымі $y = -0{,}5$ і $y = 1$. Гэта прамежкі нарастання сінуса, асноўны з якіх $(-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2})$, і прамежкі спадання сінуса, асноўны з якіх (бліжэйшы да нуля) $(\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6})$. З улікам перыядычнасці можна запісаць, што $x + \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{\pi}{2} + 2\pi m;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi m)$. І, паменшыўшы канцы прамежкаў на $\frac{\pi}{6}$, атрымаем *адказ*: $(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k) \cup (\frac{\pi}{3} + 2\pi m;\ \pi + 2\pi m)$; $k, m \in$ Z.

Пры развязванні няроўнасці $\cos\,(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin\,(x + \frac{\pi}{6}) \geq 0$ прапушчаныя пункты $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ увайшлі б у адказ і два прамежкі аб'ядналіся б у адзін. *Адказ* быў бы такім: $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$; $k \in$ Z.

<u>Прыклад **3**</u>. $2\sin^2\frac{x}{6} + 3\sin\frac{x}{3} \leq 4$.

Аднолькавыя функцыі, ды не аднолькавыя аргументы. Але заўважаем, што $\frac{x}{3} = 2\cdot\frac{x}{6}$, таму скарыстаем формулу сінуса падвоенага аргумента. Тады з трох складнікаў два будуць мець другую ступень, а трэці нулявую. Дамножыўшы апошні складнік на трыганаметрычную адзінку, атрымаем аднародную няроўнасць:

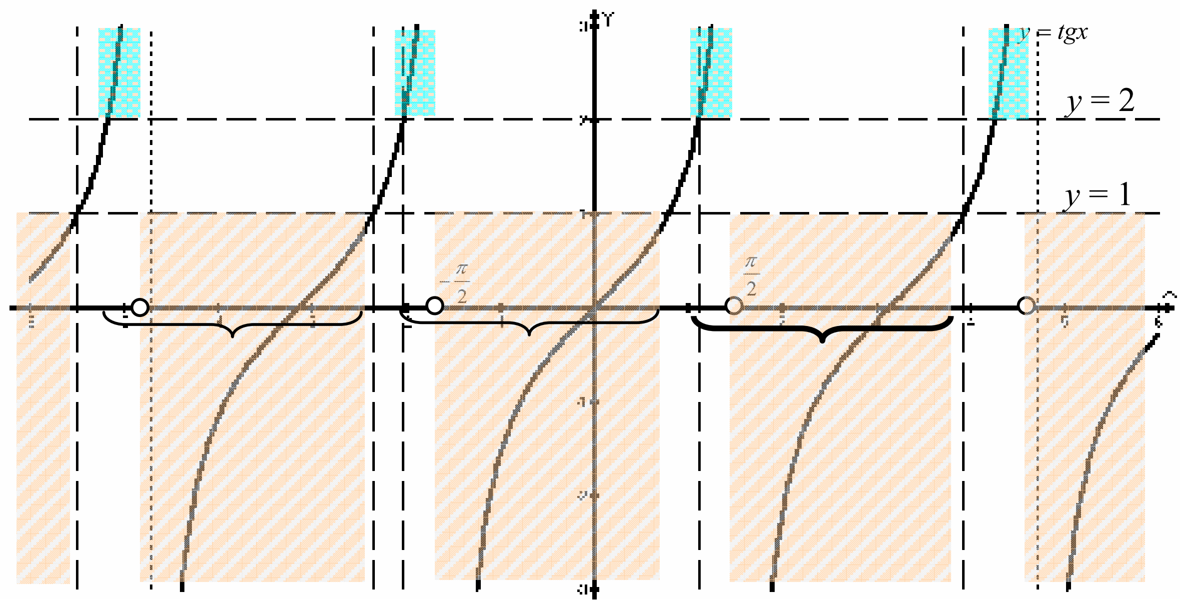
$2sin^2\frac{x}{6} + 6sin\frac{x}{6}cos\frac{x}{6} \le 4(sin^2\frac{x}{6} + cos^2\frac{x}{6})$ (пераносім усе складнікі ў левую частку, прыводзім падобныя і дзелім на –2, не забываючы павярнуць знак няроўнасці) $\Leftrightarrow$ $sin^2\frac{x}{6} - 3sin\frac{x}{6}cos\frac{x}{6} + 2$ $cos^2\frac{x}{6} \ge 0$.

Зараз, як і з аднароднымі раўнаннямі, трэба падзяліць усе складнікі няроўнасці на $cos^2\frac{x}{6}$, але перш, чым гэта рабіць, высветлім, ці можа $cos\frac{x}{6}$ быць роўным нулю. Разважаем так: калі $cos\frac{x}{6} = 0$, то, замяніўшы ў няроўнасці $cos\frac{x}{6}$ на нуль, атрымаем $sin^2\frac{x}{6} \ge 0$, – няроўнасць, праўдзівую пры любых x. Таму раўнанне $cos\frac{x}{6} = 0$ дасць частку развязкаў няроўнасці. Астатнюю частку знойдзем, лічачы $cos\frac{x}{6} \ne 0$. Падзелім левую і правую (!) часткі няроўнасці на $cos^2\frac{x}{6}$. Паколькі $cos\frac{x}{6} \ne 0$, то $cos^2\frac{x}{6}$ прымае толькі дадатныя значэнні і знак няроўнасці не змяніцца: $tg^2\frac{x}{6} - 3tg\frac{x}{6} + 2 \ge 0$.

Няроўнасць $t^2 - 3t + 2 \ge 0$ праўдзіцца для $t\in(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$. Атрымалі прасцейшыя няроўнасці з тангенсам: $tg\frac{x}{6} \le 1$ або $tg\frac{x}{6} \ge 2$. Далей глядзім на графікі (мал. 44).

Няроўнасць $tg\frac{x}{6} \le 1$ мае развязак $\frac{x}{6} \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n]$, $n\in Z$ (глядзі чырвоныя прамежкі). А няроўнасць $tg\frac{x}{6} \ge 2$ мае развязак $\frac{x}{6} \in [arctg2 + \pi m; \frac{\pi}{2} + \pi m)$, $m\in Z$ (зялёныя прамежкі). Прыгледзімся да двух такіх адрэзкаў, аб’яднаных фігурнай дужкай. Кожную пару такіх адрэзкаў раздзяляе пункт, у якім тангенса не існуе. Але як раз гэтыя лікі і ёсць корані раўнання $cos\frac{x}{6} = 0$, а значыць, як ужо высветлена раней, уключаюцца ў развязак дадзенай няроўнасці. Разам два гэтыя адрэзкі і далучаны да іх пункт утвораць прамежак [$arctg2$;

$\frac{\pi}{4}+\pi$]. Астатнія прамежкі атрымаюцца дадаваннем цэлай колькасці перыядаў тангенса. Такім чынам, $\frac{x}{6} \in [arctg2 + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi + \pi k]$. Множаннем на 6 атрымаем канчатковы *адказ*: $[6arctg2 + 6\pi k; \frac{15\pi}{2} + 6\pi k]$, $k \in Z$. Уфф!



Малюнак 44

Пасля такога груvасткага развязвання трэба адпачыць на прыкладзе больш простым.

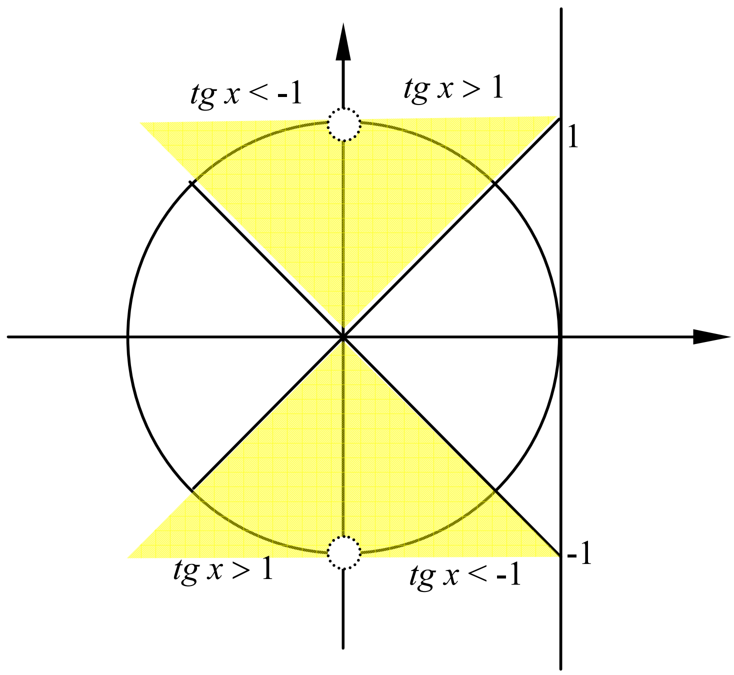
Прыклад **4**. $|sin\ x| > |cos\ x|$.

а) Калі левая і правая частка няроўнасці (любой) узята па модулі, то звычайна пазбаўляюцца ад модуляў узвядзеннем у квадрат; такое пераўтварэнне ў гэтым выпадку з’яўляецца раўназначным.

$|sin\ x|^2 > |cos\ x|^2 \Leftrightarrow sin^2 x > cos^2 x \Leftrightarrow cos^2 x - sin^2 x < 0 \Leftrightarrow cos\ 2x < 0$ (адмоўны косінус у другой і трэцяй чвэрці) $\Leftrightarrow 2x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{3\pi}{2} + 2\pi m) \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{4} + \pi m; \frac{3\pi}{4} + \pi m)$, $m \in Z$. Такі *адказ*.

б) Можна было не пазбаўляцца ад модуляў. Пераканаемся спачатку, што $cos\ x = 0$ можа быць, бо тады $sin\ x = \pm 1$ і няроўнасць $|\pm 1| > 0$ праўдзівая. Далей, лічачы ўжо $cos\ x \neq 0$, падзелім левую і правую часткі няроўнасці на $|cos\ x|$. $|cos\ x|$ прымае цяпер толькі дадатныя значэнні, таму знак няроўнасці не зменіцца. Астатняе можна паглядзець на трыганаметрычнай акружыне (мал. 45).

Улічваючы ўсё вышэй сказанае, дадзеная няроўнасць ператвараецца ў раўнанне і няроўнасць: $\cos x = 0$ або $|tg\ x| > 1$. Развязкам раўнання ёсць лікі $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Развязкам няроўнасці – дугі акружыны з фарбаванай часткі плоскасці за выключэннем выдзеленых кружочкамі пунктаў, для якіх тангенс не існуе. Але гэтыя пункты, як ужо раней высветлена, задавальняюць дадзенай няроўнасці. Таму адказ будзе ўтрымліваць дугу $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$ цалкам, астатнія дугі – праз цэлую колькасць перыядаў тангенса. *Адказ*: $(\frac{\pi}{4} + \pi m; \frac{3\pi}{4} + \pi m)$, $m \in Z$.



Малюнак 45

<u>Прыклад **5**</u>. $\sin 5x \cdot \sin 3x \le \sin x \cdot \sin 7x$.

Відавочна, што пачынаць трэба з формулы для множання сінусаў $\sin \alpha \cdot \sin \beta = -0{,}5(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$.

$\sin 5x \cdot \sin 3x \le \sin x \cdot \sin 7x \Leftrightarrow -0{,}5(\cos 8x - \cos 2x) \le -0{,}5(\cos 8x - \cos 6x) \Leftrightarrow \cos 6x - \cos 2x \ge 0$ (цяпер праз формулу рознасці косінусаў вяртаемся да здабытку сінусаў) $\Leftrightarrow -2\sin\frac{6x+2x}{2}\ \sin\frac{6x-2x}{2} \ge 0 \Leftrightarrow$ $\sin 4x \sin 2x \le 0$. У выніку замест двух здабыткаў атрымаўся адзін і ён параўноўваецца з нулём. Сітуацыя знаёмая. Такое можа быць, калі адзін з сінусаў роўны нулю або яны маюць розныя знакі. Атрымалі два раўнанні і дзве сістэмы няроўнасцяў:

$$\sin 4x = 0 \text{ або } \sin 2x = 0 \text{ або } \begin{cases} \sin 4x < 0 \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sin 4x > 0 \\ \sin 2x < 0. \end{cases}$$

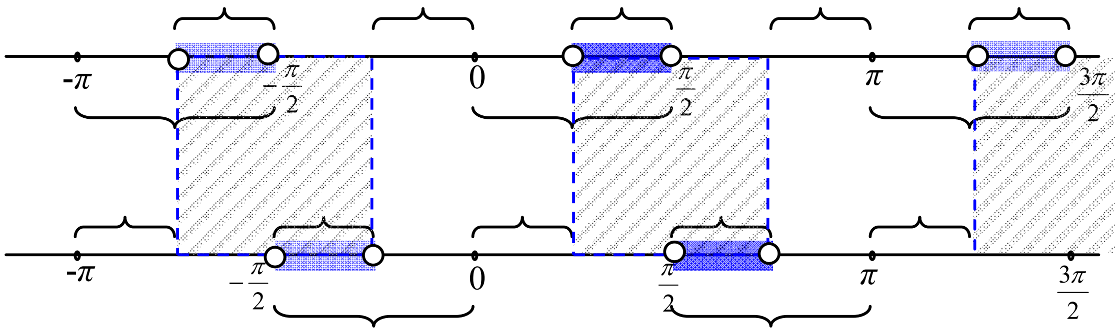
Улічваючы, што сінус роўны нулю для пунктаў на восі абсцыс (πk, $k \in Z$), дадатны ў першай і другой чвэрці і адмоўны ў трэцяй і чацвёртай чвэрці, атрымаем:

$$x = \frac{\pi k}{4} \text{ або } x = \frac{\pi n}{2} \text{ або } \begin{cases} 4x \in (-\pi + 2\pi m; 2\pi m) \\ 2x \in (2\pi t; \pi + 2\pi t) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 4x \in (2\pi c; \pi + 2\pi c) \\ 2x \in (-\pi + 2\pi p; 2\pi p). \end{cases}$$

Першая роўнасць змяшчае 8 пунктаў акружыны, другая – чатыры, і ўсе тыя чатыры ўтрымліваюцца сярод першых васьмі, таму другую роўнасць адкідаем. Засталося разабрацца з сістэмамі

$$\begin{cases} x \in (-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}; \frac{\pi m}{2}) \\ x \in (\pi t; \frac{\pi}{2} + \pi t) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \in (\frac{\pi c}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi c}{2}) \\ x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi p; \pi p) \end{cases} \quad (m, c, t, p - \text{цэлыя лікі}).$$

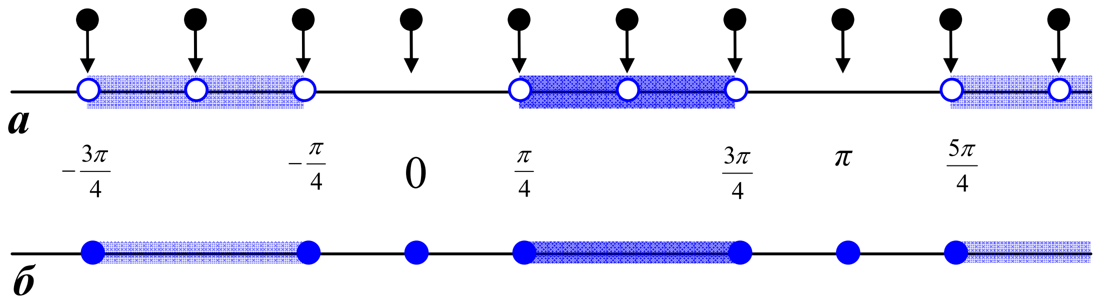
На малюнку 46 на верхняй прамой паказаны развязкі першай сістэмы, на ніжняй – другой. Пачнем з першай сістэмы. Фігурныя дужкі зверху паказваюць развязак першага раўнання, фігурныя дужкі знізу – другога. Развязак сістэмы ёсць перасячэнне (агульная частка) гэтых прамежкаў – сінія прамежкі, адзін з якіх $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$, а іншыя атрымоўваюцца дадаваннем агульнага для двух раўнанняў перыяду. Перыяд першага – $\frac{\pi}{2}$, перыяд другога – π, агульны перыяд (кратны абодвум) – π. Таму развязак першай сістэмы мае выгляд $(\frac{\pi}{4} + \pi u; \frac{\pi}{2} + \pi u)$, $u \in Z$.



Малюнак 46

Аналагічна разважаючы з апорай на малюнак 46 (ніжняя прамая), атрымаем развязак другой сістэмы: ($\frac{\pi}{2}+\pi v$; $\frac{3\pi}{4}+\pi v$), $v\in Z$.

Разам (заштрыхаваная частка малюнка 46) гэтыя развязкі ўтвараюць прамежкі, паказаныя на малюнку 47*а*. І калі да іх далучыць пункты, паказаныя на малюнку 47*а* стрэлкамі, якія з’яўляюцца развязкамі раўнання $sin\ 4x = 0$ ($x = \frac{\pi k}{4}$), то атрымаецца тое, што паказана на малюнку 47*б*.



Малюнак 47

Цяпер можна запісаць канчатковы *адказ*: $\{\pi k\} \cup [\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n]$, $k, n \in Z$.

Калі вы дабраліся да гэтага месца, усвядоміўшы ўсё вышэйнапісанае, то віншуем. І ў якасці ўзнагароды прапануем паглядзець больш просты варыянт развязку дадзенай няроўнасці ад моманту $sin\ 4x\ sin\ 2x \le 0$. Скарыстаўшы формулу сінуса падвоенага аргумента, можна $sin\ 4x$ замяніць на $2sin\ 2x\ cos\ 2x$. Атрымаем :

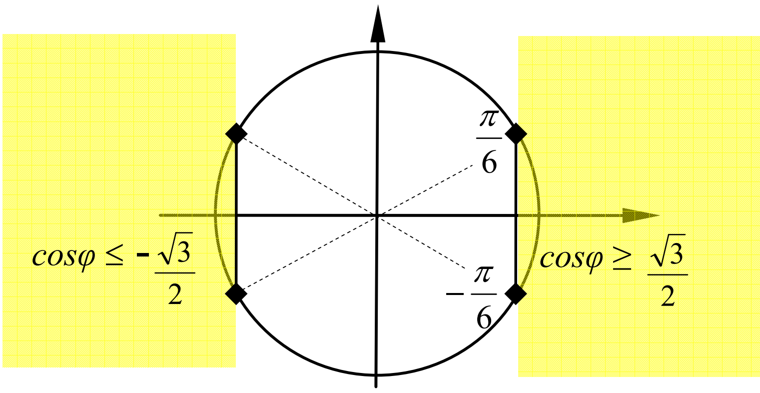
$2sin^2\ 2x\ cos\ 2x \le 0 \Leftrightarrow sin\ 2x = 0$ або $cos\ 2x \le 0$. Косінус адмоўны ў другой і трэцяй чвэрцях: $2x \in [\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$, $n \in Z$. А сінус роўны нулю для двух пунктаў акружыны 0 і π (плюс перыяд сінуса). Але лік π ужо маецца сярод развязкаў няроўнасці, таму далучаецца толькі лік 0: $2x = 2\pi k$, $k\in Z$. Дзяленнем на 2 атрымаем *адказ*: $\{\pi k\} \cup [\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n]$, $k, n \in Z$.

Першы варыянт вам усё ж трэ было паглядзець, бо нярэдка толькі так і можна разабрацца з акалічнасцямі той ці іншай няроўнасці. Прамую можна было замяніць акружынай, але з акружынай складаней па той прычыне, што адзін пункт акружыны мае бясконцае мноства каардынат і заўсёды ёсць праблема, якую з іх выбраць у якасці асноўнай. Акрамя таго, з акружынай можна працаваць толькі тады, калі перыяд атрыманага адказу роўны адной акружыне (2π) ці нейкай яе долі (доля – дроб з лічнікам 1), як, напрыклад, у дадзенай няроўнасці. У іншых выпадках раім разбірацца з прамежкамі на прамой.

<u>Прыклад **6**</u>. $sin^4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+cos^4\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\le\dfrac{5}{8}$.

Прагледзім некалькі спосабаў развязвання.

а) Ад перастаноўкі месцамі кампанентаў рознасці $x-\dfrac{\pi}{4}$ знак рознасці зменіцца, тады зменіцца знак сінуса, але ж яго чацвёртая ступень знака не зменіць. Таму $sin^4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=sin^4\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$. Цяпер дададзім да левай і правай часткі $2\,sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$. Атрымаем: $\left(sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^2\le\dfrac{5}{8}+2\,sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ (пазналі злева трыганаметрычную адзінку? Яе і хацелі атрымаць такім дадаваннем) $\Leftrightarrow 1\le\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}\cdot 4\,sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\Leftrightarrow\dfrac{3}{8}\le\dfrac{1}{2}\left(2sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cdot cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^2\Leftrightarrow sin^2 2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\ge\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\left|sin\,2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right|\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow sin\,2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ або $sin\,2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\le-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ або $sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)\le-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (прыменім адну з формул прывядзення) $\Leftrightarrow cos\,2x\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ або $cos\,2x\le-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Развязак атрыманых дзвюх прасцейшых трыганаметрычных няроўнасцяў падгледзім на акружыне. На малюнку 48 бачым, што развязак абедзвюх няроўнасцяў можа быць запісаны адной формулай: $2x\in\left[-\dfrac{\pi}{6}+\pi m;\ \dfrac{\pi}{6}+\pi m\right]$. *Адказ*: $x\in\left[-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}m;\ \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}m\right]$, $m\in Z$.

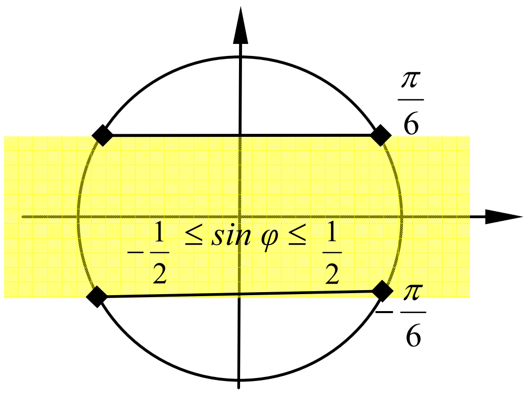


Малюнак 48

б) Можна было паспрабаваць скарыстаць формулы паніжэння ступені (высновы з формулы косінуса падвоенага аргумента): $sin^2\,\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$, $cos^2\,\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$. Атрымалі б:

$$\left(\frac{1-\cos(2x-\frac{\pi}{2})}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2x)}{2}\right)^2 \le \frac{5}{8}.$$

І далей увесці новую зменную: $cos\,(2x - \frac{\pi}{2}) = cos\,(\frac{\pi}{2} - 2x) = sin\,2x = f$: $\frac{(1-f)^2}{4}+\frac{(1+f)^2}{4} \le \frac{5}{8} \Leftrightarrow 2 + 2f^2 \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow f^2 \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow |f| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$. У выніку атрымаем: $-\frac{1}{2} \le sin\,2x \le \frac{1}{2}$. Далей паглядзім на малюнак 49 і ўбачым там тое ж, што і на малюнку 48: $2x \in [-\frac{\pi}{6} + \pi m;\ \frac{\pi}{6} + \pi m]$. *Адказ*: $[-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}m;\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}m]$, $m \in Z$.



Малюнак 49

в) Калі б не здагадаліся зрабіць тое, што паказана ў варыянтах а і б, то маглі б здагадацца замяніць адпаведна асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці $sin^2\,(\frac{\pi}{4} - x)$ на $1 - cos^2\,(\frac{\pi}{4} - x)$:

$(1 - cos^2\,(\frac{\pi}{4} - x))^2 + cos^4\,(\frac{\pi}{4} - x) \le \frac{5}{8}$, каб затым $cos^2\,(\frac{\pi}{4} - x)$ абазваць новай літарай і атрымаць звычайную квадратычную няроўнасць.

Або – дамножыць $\frac{5}{8}$ на квадрат трыганаметрычнай адзінкі, каб атрымаць аднародную няроўнасць:

$$sin^4\,(\frac{\pi}{4} - x) + cos^4\,(\frac{\pi}{4} - x) \le \frac{5}{8}(sin^2\,(\frac{\pi}{4} - x) + cos^2\,(\frac{\pi}{4} - x))^2.$$

Любы з варыянтаў прывёў бы да таго ж выніку. Але, як бачыце, гэтых варыянтаў шмат і знайсці прыгодны сярод іх няцяжка. Набывайце спрыт.

Прыклад 7. $\frac{3}{5}sin(\frac{2\pi}{3} + 2x) + 0{,}4cos(\frac{5\pi}{12} - x) \le -1.$

Трэба неяк заўважыць, што сума каэфіцыэнтаў пры трыганаметрычных функцыях роўна адзінцы (0,6 + 0,4 = 1), І стане зразумелым, што левая частка няроўнасці прымае значэнні з прамежку [–1; 1] і таму меншая за мінус адзінку не бывае. Тады няроўнасць пераўтворыцца ў раўнанне, раўназначнае сістэме раўнанняў:

$$\begin{cases} \sin(\frac{2\pi}{3} + 2x) = -1 \\ \cos(\frac{5\pi}{12} - x) = -1. \end{cases}$$

З першага атрымаем: $\frac{2\pi}{3} + 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, адкуль $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

З другога: $\frac{5\pi}{12} - x = \pi + 2n\pi$, адкуль $x = -\frac{7\pi}{12} - 2n\pi$. Апошнюю роўнасць можна перапісаць так: $x = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi$. Пры такой замене нічога не зменіцца, бо n можа прымаць любыя цэлыя значэнні (дадатныя, адмоўныя ці нуль), Тое, што ў першай роўнасці атрымалася б пры $n = 68$, у другой роўнасці атрымаецца пры $n = –68$.

Каб знайсці развязак сістэмы раўнанняў, трэба прыраўняць атрыманыя развязкі раўнанняў і высветліць пры якіх цэлых k і n такая роўнасць магчымая.

$\frac{5\pi}{12} + k\pi = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi$ (падзелім на π) $\Leftrightarrow$ $1 + k = 2n$. Адсюль бачна, што n можа быць любым цэлым, а k – няцотным ($k = 2n - 1$), тады адказ сістэмы будзе ў роўнасці з літарай n (або ў роўнасці з літарай k, калі выканаць падстаноўку $k = 2n - 1$). *Адказ*: $-\frac{7\pi}{12} + 2n\pi$, $n \in Z$.

<u>Прыклад **8**</u>. $\cos\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{2} > -2$.

Відавочна, што такая няроўнасць можа мець сваімі развязкамі або любы x, або за выключэннем тых x, для якіх рознасць дадзеных косінусаў роўна –2. Таму напрошваецца развязаць спачатку раўнанне $\cos\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{2} = -2$, зноў жа раўназначнае сістэме раўнанняў:

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{3} = -1 \\ \cos\frac{x}{2} = 1. \end{cases}$$

З першага раўнання $x = 3\pi + 6k\pi$, з другога $x = 4n\pi$. Прыраўняўшы і падзяліўшы на π, атрымаем: $3 + 6k = 4n$. Апошняя роўнасць немагчымая, бо злева няцотны цэлы лік, а справа – цотны. Раўнанне кораняў не мае, таму выключаць нечага. *Адказ*: $(-\infty; \infty)$.

Можна было скарыстаць формулу для адымання косінусаў $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. Атрымалі б: $-2\sin\frac{5x}{12}\sin\left(\frac{-x}{12}\right) > -2$. Пасля дзялення на –2 $\left(\sin\frac{5x}{12}\sin\left(\frac{-x}{12}\right) < 1\right)$ становіцца бачна, што развязкамі такой няроўнасці могуць быць любыя лікі, акрамя тых, для якіх здабытак сінусаў роўны 1. І таму сапачатку трэба развязаць дзве сістэмы

$$\begin{cases} \sin\frac{5x}{12} = 1 \\ \sin\frac{x}{12} = -1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \sin\frac{5x}{12} = -1 \\ \sin\frac{x}{12} = 1. \end{cases}$$

З першай сістэмы атрымаем $\frac{5x}{12} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ і $\frac{x}{12} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ або $x = \frac{6\pi}{5} + \frac{24\pi n}{5}$ і $x = -6\pi + 24\pi k$. Гэта развязкі асобных раўнанняў, а каб знайсці развязкі сістэмы, трэба прыраўняць атрыманыя "іксы": $\frac{6\pi}{5} + \frac{24\pi n}{5} = -6\pi + 24\pi k$ (дамножым на $\frac{5}{6\pi}$) $\Leftrightarrow 1 + 4n = -1 + 20k \Leftrightarrow 2 + 4n = 20k \Leftrightarrow 1 + 2n = 10k$. Пры цэлых n і k у левай частцы роўнасці няцотны цэлы лік, у правай – цотны, таму роўнасць немагчымая, з чаго вынікае, што першая сістэма не мае развязкаў.

З другой сістэмы аналагічнымі разважаннямі атрымаем тое ж. У вынік можна сцвярджаць, што дадзеная няроўнасць праўдзіцца пры любым x.

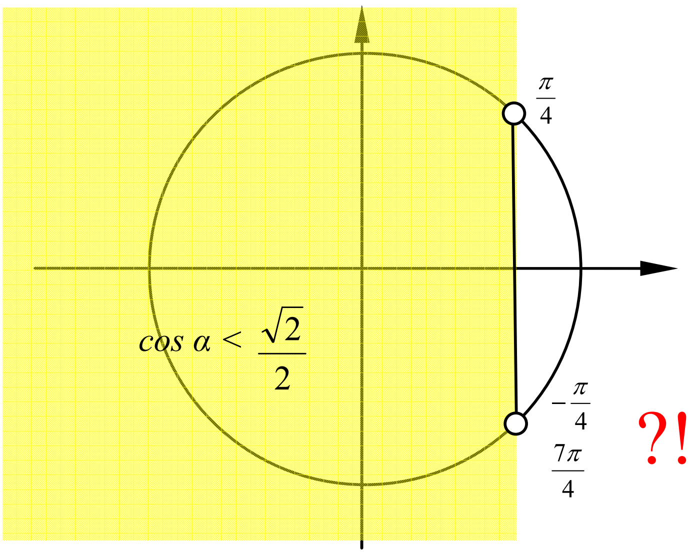
<u>Прыклад **9**</u>. $5\sin x + 3\cos x < \sqrt{17}$.

Як выраз з дзвюма функцыямі пераўтварыць у выраз з адной функцыяй, – вы ўжо ведаеце:

$$\sqrt{34}\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\sin x + \frac{3}{\sqrt{34}}\cos x\right) < \sqrt{17} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{34}}\sin x + \frac{3}{\sqrt{34}}\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Увядзём новую зменную φ, для якой $\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

Атрымаем прасцейшую няроўнасць: $\cos(x - \varphi) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Калі яе развязак паглядзець на трыганаметрычнай акружыне (мал. 50), то атрымаем:



Малюнак 50

$x - \varphi \in (\frac{\pi}{4} + 2m\pi; \frac{7\pi}{4} + 2m\pi)$, $m \in Z$, адкуль $x \in (\varphi + \frac{\pi}{4} + 2m\pi; \varphi + \frac{7\pi}{4} + 2m\pi)$. Паколькі $\varphi = arctg\,\frac{5}{3}$ (бо $sin\,\varphi = \frac{5}{\sqrt{34}}$ і $cos\,\varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$, адсюль $tg\,\varphi = \frac{5}{\sqrt{34}} : \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{5}{3}$), то канчатковы *адказ*: $(arctg\,\frac{5}{3} + \frac{\pi}{4} + 2m\pi; arctg\,\frac{5}{3} + \frac{7\pi}{4} + 2m\pi)$, $m \in Z$.

Чаканая і досыць папулярная памылка ў тых, хто карыстаецца акружынай, а не графікам: замест правільнага $\frac{7\pi}{4}$ напісаць няправільнае $-\frac{\pi}{4}$. Але прамежак $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$ знаходзіцца ў незафарбаванай частцы плоскасці, там косінус большы за $\frac{\sqrt{2}}{2}$. І калі запісаць наадварот: $(\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4})$, то атрымаецца ўсё адно той жа прамежак (гэта як бы на лікавай прамой прамежкі [5; 9] і [9; 5]). Калі рухацца па акружыне ад нуля ў дадатным кірунку, то першым з двух канцоў пазначанага прамежку сустрэнем пункт $\frac{\pi}{4}$, другі пункт такім чынам павінен мець каардынату, большую за $\frac{\pi}{4}$, гэта лік $\frac{7\pi}{4}$. Каб не рабіць такіх памылак, лепш усведамляйце сутнасць каардынат на трыганаметрычнай акружыне або карыстайцеся ў такіх выпадках графікамі. Поспехаў!

Калі вы ўважліва прачыталі і ўспрынялі ўсё тут напісанае, праглядваючы спадарожныя малюнкі, калі зразумелі сутнасць новых паняткаў, звязаных з імі сцвярджэнняў і прыведзеных прыкладаў, то аснова для ведання трыганаметрыі у вас закладзена. Цяпер усё гэта трэба запомніць. З гэтай мэтай тая ж самая інфармацыя цяпер будзе пададзена ў форме пытанняў з адказамі. Правярайце сваё веданне: закрыйце адказы, чытайце пытанні і адказвайце на іх, потым зверце свой адказ з адказам у табліцы. Калі памылак шмат, то пажадана перачытаць і тэкст дапаможніка, і адказы на пытанні, потым паўтарыць гэткі ж самакантроль.

I. Трыганаметрычная акружына

1. *Што такое трыганаметрыя?*	Трыганаметрыя – раздзел матэматыкі, які вывучае трыганаметрычныя функцыі лікавых зменных (вуглоў). Назва перакладаецца з старажытнагрэчаскай мовы як “вымярэнне трохвугольнікаў”, што тлумачыцца пачатковым паходжаннем гэтых функцый ад залежнасці паміж вугламі і адносінамі старон прамавугольных трохвугольнікаў.
2. *У якіх адзінках вымяраюцца вуглы?*	Вуглы вымяраюцца ў градусах (якія дзеляцца на вуглавыя мінуты, а тыя – на вуглавыя секунды) і ў радыянах.
3. *Якую адзінку вымярэння вуглоў называюць градусам (мінутай, секундай)?*	Градус – гэта вугал, які складае адну ставасьмідзесятую частку разгорнутага вугла; вуглавая мінута – гэта вугал, які складае адну шасцідзесятую частку градуса; вуглавая секунда – гэта вугал, які складае адну шасцідзесятую частку мінуты.
4. *Якую адзінку вымярэння вуглоў называюць* ***радыянам****?*	**Радыян** – гэта цэнтральны вугал, які высякае на акружыне дугу, па даўжыні роўную радыусу гэтай акружыны. *(Цэнтральным вуглом называюць вугал, вяршыня якога знаходзіцца ў цэнтры нейкай акружыны.)*
5. *Як звязаны паміж сабою градус і радыян?*	Паколькі даўжыня акружыны вылічваецца па формуле $\boldsymbol{C=2\pi R}$ (г.зн. у акружыне змяшчаецца 2π радыусаў), таму паварот на поўны вугал (на 360°) – гэта паварот на 2π радыянаў. Такім чынам, $180° = \pi$ радыянаў. Адсюль: $1° = \frac{\pi}{180}$ радыянаў, 1 радыян $= \frac{180}{\pi}$ градусаў ($\approx 57^{\circ}$).
6. *Якую акружыну называюць* ***трыганаметрычнай****?*	**Трыганаметрычнай** акружынай называюць акружыну ***адзінкавага радыуса з цэнтрам у пачатку каардынатнай плоскасці***.
7. *Якім раўнаннем задаецца трыганаметрычная акружына?*	Паколькі трыганаметрычная аружына мае цэнтр у пункце (0;0) і радыус адзінкавай даўжыні, то яе раўнанне мае выгляд: $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$.

8. *Дзе знаходзіцца пачатак (нулявы пункт) трыганаметрычнай акружыны?*	Пачатак трыганаметрычнай акружыны – гэта пункт яе перасячэння з дадатным праменем восі абсцыс.
9. *Які кірунак руху пункта па трыганаметрычнай акружыне называюць дадатным?*	Дадатным кірункам называюць кірунак руху пункта па трыганаметрычнай акружыне супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі.
10. *Які кірунак руху пункта па трыганаметрычнай акружыне называюць адмоўным?*	Адмоўным кірункам лічаць кірунак руху пункта па трыганаметрычнай акружыне адпаведны ходу гадзіннікавай стрэлкі.
11. *Які лік называюць каардынатай пункта на трыганаметрычнай акружыне?*	Каардынатай дадзенага пункта на трыганаметрычнай акружыне называюць велічыню дугі ў радыянах ці градусах ад нулявога пункта акружыны да дадзенага пункта, узятую са знакам “+” ці ”–” у залежнасці ад кірунку руху.
12. *Як адрозніваюцца каардынаты аднаго і таго ж пункта на трыганаметрычнай акружыне?*	Каб патрапіць у тое ж месца, пункт павінен прайсці у адным ці другім кірунку цэлую акружыну або дзве (тры, чатыры...) цэлыя акружыны. Акружына адзінкавага радыуса мае даўжыню 2π, таму каардынаты аднаго і таго ж пункта акружыны могуць адрознівацца на 2π, на 4π, на 6π і г.д., а ўвогуле на $2\pi n$, дзе n – любы цэлы лік *(дадатны, адмоўны ці нуль)*.
13. *Як знайсці пункт на трыганаметрычнай акружыне па зададзенай яго каардынаце ў градусах?*	Дзяленнем дадзенага ліку на 360 атрымліваюць колькасць акружын, з якіх цэлую частку адкідаюць, а дробную рэшту вяртаюць у градусы множаннем на 360. Атрымаецца лік паміж 0° і 360°, які і пакажа становішча пункта на акружыне. *(Прыводзіцца прыклад)*
14. *Як знайсці пункт на трыганаметрычнай акружыне па зададзенай яго каардынаце ў радыянах?*	Дадзены лік памнажаюць на $180/\pi$, дзе $\pi \approx 3{,}14159...$, такім множаннем каардыната ў радыянах пераводзіцца ў градусах. Па каардынаце ў градусах і знаходзяць шуканы пункт. *(Прыводзіцца прыклад)*
15. *Якія*	Акружына мае на перасячэнні з восямі

каардынаты ў радыянах і градусах маюць пункты трыганаметрычнай акружыны на яе перасячэнні з восямі каардынат?	каардынат 4 пункты, якія падзяляюць акружыну на 4 роўныя часткі па 90°. Асноўныя іх каардынаты ў градусах: 0°, 90°, 180° і 270°. Але дадаванне дугі ў 360° (поўнай акружыны) ці некалькіх такіх дуг не змяняе становішча пункта на акружыне. Таму кожны з такіх пунктаў мае бясконцае мноства каардынат, якія задаюцца формуламі $360^\circ k$, $90^\circ+360^\circ k$, $180^\circ+360^\circ k$ і $270^\circ+360^\circ k$, дзе k – любы цэлы лік. Паколькі π радыянаў = 180°, то формулы каардынатаў гэтых пунктаў у радыянах маюць наступны выгляд: $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$ і $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, дзе n – любы цэлы лік.
16. *Як нумаруюцца чвэрці трыганаметрычнай акружыны?*	Восі каардынат падзяляюць трыганаметрычную акружыну на 4 часткі – чвэрці, якія нумаруюцца ад нулявога пункта акружыны супраць ходу гадзіннікавай стрэлкі: I чвэрць – ад 0° да 90°, II чвэрць – ад 90° да 180°, III чвэрць – ад 180° да 270°, IV чвэрць – ад 270° да 360°. У радыянах: I чвэрць – ад 0 да $\frac{\pi}{2}$, II чвэрць – ад $\frac{\pi}{2}$ да π, III чвэрць – ад π да $\frac{3\pi}{2}$, IV чвэрць – ад $\frac{3\pi}{2}$ да 2π.

II-1. Сінус ліку

17. *Якую функцыю называюць* ***сінусам ліку*** *φ?*	**Сінусам ліку φ** (*sin* φ) называюць **ардынату** адпаведнага пункта трыганаметрычнай акружыны *(гаворка ідзе пра пункт з каардынатай φ на акружыне).*
18. *Якія значэнні можа прымаць sin φ?*	Паколькі трыганаметрычная акружына мае радыус 1 і цэнтр у пачатку каардынат, то ардыната любога яе пункта не можа быць большай за 1 і меншай за –1. Таму: $\mathbf{-1 \le \sin\varphi \le 1}$.
19. *Які абсяг вызначэння функцыі sin φ?*	Паколькі **любы** пункт трыганаметрычнай акружыны мае сваю ардынату, то абсягам вызначэння функцыі *sin* φ ёсць мноства **ўсіх** рэчаісных лікаў (або нейкае яго падмноства, калі гэта асобна адзначана).
20. *Якімі іншымі ўласцівасцямі валодае функцыя sin φ?*	Функцыя *sin* φ кавалкава манатонная (мае прамежкі нарастання і прамежкі спадання), мае “нулі” і прамежкі знаканязменнасці, абмежаваная зверху і знізу, мае найбольшае значэнне і найменшае значэнне, няцотная, перыядычная *(іншыя ўласцівасці школьнай праграмай не прадугледжаныя).*
21. *Які перыяд функцыі sin φ?*	Пры руху па акружыне пункт вяртаецца на ранейшае месца, калі пройдзе поўную акружыну, даўжыня якой 2π (бо акружына мае радыус 1). Таму праз 2π, 4π, 6π,.. і ўвогуле праз $2\pi n$ (дзе n – любы цэлы лік) усе значэнні функцыі *sin* φ будуць паўтарацца. Любы з названых лікаў і ёсць перыяд функцыі *sin* φ. **Найменшы дадатны з іх 2π.** $2\pi n$ (дзе n – любы цэлы лік) – агульная форма запісу перыяду, які трэба заўсёды ўлічваць, калі размова ідзе пра аргумент φ функцыі *sin* φ.
22. *Калі функцыя sin φ прымае найбольшае значэнне?*	**Найбольшае** значэнне, роўнае **1**, функцыя *sin* φ прымае тады, калі $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ дзе n – любы цэлы лік *(“верхні” пункт трыганаметрычнай акружыны).*

23. *Калі функцыя* *sin φ прымае найменшае значэнне?*	**Найменшае** значэнне, роўнае **-1**, функцыя *sin φ* прымае тады, калі $\boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$, дзе k – любы цэлы лік *(“ніжні” пункт трыганаметрычнай акружыны).*
24. *Калі функцыя* *sin φ прымае значэнні, роўныя нулю?*	Значэнні, роўныя **нулю**, функцыя *sin φ* прымае тады, калі $\varphi = \pi n$, дзе n – любы цэлы лік *(“правы” і “левы” пункты трыганаметрычнай акружыны).*
25. *Калі функцыя* *sin φ прымае дадатныя значэнні?*	Дадатныя значэнні функцыя *sin φ* прымае тады, калі пункт знаходзіцца на “верхняй” палове трыганаметрычнай акружыны (I і II чвэрці). Інакш кажучы, дадатныя значэнні функцыя *sin φ* прымае на прамежку ад 0 да π (ад 0° да 180°). З улікам перыядычнасці можна сказаць так: **дадатныя значэнні функцыя *sin φ* прымае тады, калі** $\boldsymbol{2\pi n < \varphi < \pi + 2\pi n}$, дзе n – любы цэлы лік). Ці яшчэ так: **дадатныя значэнні функцыя *sin φ* прымае на прамежках** $\boldsymbol{(2\pi k;\ \pi + 2\pi k)}$, дзе k – любы цэлы лік.
26. *Калі функцыя* *sin φ прымае адмоўныя значэнні?*	Адмоўныя значэнні функцыя *sin φ* прымае тады, калі пункт знаходзіцца на “ніжняй” палове трыганаметрычнай акружыны (III і IV чвэрці). Інакш кажучы, адмоўныя значэнні функцыя *sin φ* прымае на прамежку ад π да 2π (ад 180° да 360°) або часцей гавораць так: на прамежку ад $-\pi$ да 0 (ад –180° да 0°). З улікам перыядычнасці можна сказаць так: **адмоўныя значэнні функцыя *sin φ* прымае тады, калі** $\boldsymbol{-\pi + 2\pi m < \varphi < 2\pi m}$ (m – любы цэлы лік). Ці яшчэ так: **адмоўныя значэнні функцыя *sin φ* прымае на прамежках** $\boldsymbol{(-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n)}$, дзе n – любы цэлы лік.

27. *На якіх прамежках функцыя sin φ нарастае?*	Ад найменшага значэння –1 да найбольшага значэння 1 функцыя *sin φ* нарастае пры дадатным кірунку руху пункта па “правай” дузе трыганаметрычнай акружыны: ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$ (ад –90° да 90°). З улікам перыядычнасці можна сказаць так: **функцыя *sin φ* нарастае, калі** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k \le \varphi \le \frac{\pi}{2}+2\pi k$, дзе k – любы цэлы лік. Або так: **функцыя *sin φ* нарастае на прамежках** $[-\frac{\pi}{2}+2\pi m;\ \frac{\pi}{2}+2\pi m]$**,** дзе m – любы цэлы лік.
28. *На якіх прамежках функцыя sin φ спадае?*	Ад найбольшага значэння 1 да найменшага значэння –1 функцыя *sin φ* спадае пры дадатным кірунку руху пункта па “левай” дузе трыганаметрычнай акружыны: ад $\frac{\pi}{2}$ да $\frac{3\pi}{2}$ (ад 90° да 270°). З улікам перыядычнасці можна сказаць так: **функцыя *sin φ* спадае, калі** $\frac{\pi}{2}+2\pi k \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}+2\pi k$, дзе k – любы цэлы лік. Або так: **функцыя *sin φ* спадае на прамежках** $[\frac{\pi}{2}+2\pi m;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi m]$**,** дзе m – любы цэлы лік.
29. *Чаму функцыя sin φ няцотная?*	Функцыя *sin φ* **няцотная** таму, што: па-першае, яе **абсяг вызначэння (**–∞; +∞**) сіметрычны адносна нуля** *(калі абсяг вызначэння функцыі ёсць не ўсё мноства рэчаісных лікаў, аб чым асобна павінна быць сказана, то пытанне аб сіметрычнасці трэба высвятляць асобна)*, па-другое, пры змяненні знака аргумента *(г.зн. кірунку руху па акружыне ад пачатковага яе пункта)* без змены яго модуля змяняецца знак (і толькі знак) ардынаты гэтага пункта. Дакладней апошняе можна выказаць так: су**працьлеглым значэнням аргумента *φ* адпавядаюць супрацьлеглыя значэнні функцыі *sin φ***; або так: ***sin* (*–φ*) = *–sin φ*** для любых ***φ*** з абсягу вызначэння.

II-2. Косінус ліку

30. *Якую функцыю называюць* ***косінусам*** *ліку φ?*	**Косінусам ліку φ** ($\cos\varphi$) называюць **абсцысу** адпаведнага пункта трыганаметрычнай акружыны *(гаворка ідзе пра пункт з каардынатай φ на акружыне)*.
31. *Якія значэнні можа прымаць функцыя cos φ?*	Паколькі трыганаметрычная акружына мае радыус 1 і цэнтр у пачатку каардынат, то абсцыса любога яе пункта не можа быць большай за лік 1 і меншай за лік –1. Таму: $\mathbf{-1 \le \cos\varphi \le 1}$.
32. *Які абсяг вызначэння функцыі cos φ?*	Паколькі **любы** пункт трыганаметрычнай акружыны мае сваю абсцысу, то абсяг вызначэння функцыі $\cos\varphi$ ёсць мноства **ўсіх** рэчаісных лікаў (або нейкае яго падмноства, калі гэта асобна адзначана).
33. *Якімі іншымі ўласцівасцямі валодае функцыя cos φ?*	Функцыя $\cos\varphi$ кавалкава манатонная (мае прамежкі нарастання і прамежкі спадання), мае “нулі” і прамежкі знаканязменнасці, абмежаваная зверху і знізу, мае найбольшае значэнне і найменшае значэнне, цотная, перыядычная *(іншыя ўласцівасці школьнай праграмай не прадугледжаны)*.
34. *Які перыяд функцыі cos φ?*	Пры руху па акружыне пункт вяртаецца на ранейшае месца, калі пройдзе поўную акружыну, даўжыня якой 2π (бо акружына мае радыус 1). Таму праз 2π, 4π, 6π,.. і ўвогуле праз $2\pi n$ (дзе n – любы цэлы лік) усе значэнні функцыі $\cos\varphi$ будуць паўтарацца. Любы з названых лікаў і ёсць перыяд функцыі $\cos\varphi$. **Найменшы дадатны з іх 2π**. $2\pi n$ (дзе n – любы цэлы лік) – агульная форма запісу перыяду, які трэба заўсёды ўлічваць, калі размова ідзе пра аргумент φ функцыі $\cos\varphi$.
35. *Калі функцыя cos φ прымае найбольшае значэнне?*	**Найбольшае** значэнне , роўнае **1**, функцыя $\cos\varphi$ прымае тады, калі $\boldsymbol{\varphi = 2\pi n}$, дзе n – любы цэлы лік *(“правы” пункт трыганаметрычнай акружыны)*.

36. *Калі функцыя cos φ прымае найменшае значэнне?*	**Найменшае** значэнне, роўнае **–1**, функцыя *cos φ* прымае тады, калі $\boldsymbol{\varphi = \pi + 2\pi n}$, дзе *n* – любы цэлы лік *("левы" пункт трыганаметрычнай акружыны).*
37. *Калі функцыя cos φ прымае значэнні, роўныя нулю?*	Значэнні, роўныя **нулю**, функцыя *cos φ* прымае тады, калі $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi m$, дзе *m* – любы цэлы лік *("верхні" і "ніжні" пункты трыганаметрычнай акружыны).*
38. *Калі функцыя cos φ прымае дадатныя значэнні?*	Дадатныя значэнні функцыя *cos φ* прымае тады, калі пункт знаходзіцца на "правай" палове трыганаметрычнай акружыны (IV і I чвэрці). Інакш кажучы, дадатныя значэнні функцыя *cos φ* прымае на прамежку ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$ (ад –90° да 90°). З улікам перыядычнасці можна сказаць так: **дадатныя значэнні функцыя *cos φ* прымае тады, калі** $\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \varphi < \frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, дзе *n* – любы цэлы лік**.** Ці яшчэ так: **дадатныя значэнні функцыя *cos φ* прымае на прамежках** $\boldsymbol{(}-\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{\pi}{2} + 2\pi m\boldsymbol{)}$**,** дзе *m* – любы цэлы лік.
39. *Калі функцыя cos φ прымае адмоўныя значэнні?*	Адмоўныя значэнні функцыя *cos φ* прымае тады, калі пункт знаходзіцца на "левай" палове трыганаметрычнай акружыны (II і III чвэрці). Інакш кажучы, адмоўныя значэнні функцыя *cos φ* прымае на прамежку ад $\frac{\pi}{2}$ да $\frac{3\pi}{2}$ (ад 90° да 270°). З улікам перыядычнасці можна сказаць так: **адмоўныя значэнні функцыя *cos φ* прымае тады, калі** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \varphi < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, дзе *n* – любы цэлы лік**.** Ці яшчэ так: **адмоўныя значэнні функцыя *cos φ* прымае на прамежках** $\boldsymbol{(}\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{3\pi}{2} + 2\pi m\boldsymbol{)}$**,** дзе *m* – любы цэлы лік.

40. *На якіх прамежках функцыя cos φ нарастае?*	Ад найменшага значэння –1 да найбольшага значэння 1 функцыя *cos* φ нарастае пры дадатным кірунку руху пункта па "ніжняй" дузе трыганаметрычнай акружыны: ад $-\pi$ да 0 (ад –180° да 0°). З улікам перыядычнасці можна сказаць так: **функцыя *cos*** $\boldsymbol{\varphi}$ **нарастае, калі** $-\pi + 2\pi\, k \le \varphi \le 2\pi\, k$, дзе k – любы цэлы лік. Або так: **функцыя *cos*** $\boldsymbol{\varphi}$ **нарастае на прамежках** $[-\pi + 2\pi\, m\ ;\ 2\pi\, m]$**,** дзе m – любы цэлы лік.
41. *На якіх прамежках функцыя cos φ спадае?*	Ад найбольшага значэння 1 да найменшага значэння –1 функцыя *cos* φ спадае пры дадатным кірунку руху пункта па "верхняй" дузе трыганаметрычнай акружыны: ад 0 да π (ад 0° да 180°). З улікам перыядычнасці можна сказаць так: **функцыя *cos*** $\boldsymbol{\varphi}$ **спадае, калі** $2\pi\, k \le \varphi \le\ \pi + 2\pi\, k$, дзе k – любы цэлы лік. Або так: **функцыя *cos*** $\boldsymbol{\varphi}$ **спадае на прамежках** $[2\pi m\ ;\ \pi + 2\pi m]$**,** дзе m – любы цэлы лік.
42. *Чаму функцыя cos φ цотная?*	Функцыя *cos* φ **цотная** таму, што: па-першае, яе **абсяг вызначэння** ($-\infty$; $+\infty$) **сіметрычны адносна нуля** *(калі абсяг вызначэння функцыі ёсць не ўсё мноства рэчаісных лікаў, аб чым павінна быць асобна сказана, то пытанне аб сіметрычнасці трэба высвятляць асобна)*, па-другое, пры змяненні знака аргумента *(г.зн. кірунку руху па акружыне ад пачатковага яе пункта)* без змены яго модуля не змяняецца ні модуль, ні знак самой функцыі. Дакладней апошняе можна выказаць так: **любым супрацьлеглым значэнням аргумента** $\boldsymbol{\varphi}$ **адпавядаюць роўныя значэнні функцыі *cos*** $\boldsymbol{\varphi}$; або так: $\boldsymbol{\cos(-\varphi) = \cos\varphi}$ для любога $\boldsymbol{\varphi}$ з абсягу вызначэння.

ІІ-3. Тангенс ліку

43. *Якую функцыю называюць **тангенсам** ліку φ?*	**Тангенсам** ліку φ ($tg\ \varphi$) называюць адносіну сінуса ліку φ да яго косінуса: $tg\ \varphi = \dfrac{\sin\varphi}{cos\varphi}$.
44. *Якую прамую называюць лініяй тангенсаў?*	Лініяй тангенсаў называюць прамую, якая датыкаецца да трыганаметрычнай акружыны ў яе нулявым пункце.
45. *Якія значэнні можа прымаць тангенс ліку φ?*	Тангенс ліку φ можа прымаць любыя рэчаісныя значэнні (любы лік на лініі тангенсаў можа быць тангенсам нейкага ліку φ на трыганаметрычнай акружыне).
46. *Які абсяг вызначэння функцыі tg φ?*	Абсяг вызначэння функцыі $tg\ \varphi$ ствараюць усе рэчаісныя лікі, акрамя $\dfrac{\pi}{2}+\ \pi\ c$ (c – любы цэлы лік), бо косінусы гэтых лікаў роўныя нулю, а дзяленне на нуль немагчымае. Таму $\varphi \in (-\dfrac{\pi}{2}+\pi\ c;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi\ c)$, дзе c – любы цэлы лік.
47. *Якімі іншымі ўласцівасцямі валодае функцыя tg φ?*	Функцыя $tg\ \varphi$ кавалкава манатонная (мае прамежкі нарастання), мае “нулі” і прамежкі знаканязменнасці, не абмежаваная зверху і знізу, няцотная, перыядычная *(іншыя ўласцівасці школьнай праграмай не прадугледжаныя).*
48. *Які перыяд функцыі tg φ?*	Тангенс ліку φ на акружыне знаходзяць перасячэннем прамой, якая праходзіць праз гэты пункт і цэнтр акружыны, з лініяй тангенсаў. Таму паварот такой прамой на разгорнуты вугал не зменіць тангенса. Такім чынам, лікі π, 2π, 3π,.. і ўвогуле $\pi\, n$ (дзе n – любы цэлы лік) ёсць перыяды тангенса. Найменшы дадатны з іх $\boldsymbol{\pi}$. $\pi\ n$ (дзе n – любы цэлы лік) – агульная форма запісу перыяду, які трэба штораз улічваць, калі размова ідзе пра аргумент функцыі $tg\ \varphi$.

49. *Які характар манатоннасці функцыі $y = tg\ \varphi$?*	Функцыя $y = tg\ \varphi$ не з'яўляецца манатоннай на ўсёй вобласці вызначэння, але мае прамежкі нарастання. Функцыя $y = tg\ \varphi$ нарастае ад $-\infty$ да $+\infty$ пры дадатным кірунку руху пункта па "правай" дузе трыганаметрычнай акружыны – ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$ (ад -90^o да 90^o). Паколькі прамежак ад $-\frac{\pi}{2}$ да $\frac{\pi}{2}$ мае даўжыню π, а π – гэта перыяд тангенса, то можна сказаць, што функцыя $y = tg\ \varphi$ нарастае на прамежках $(-\frac{\pi}{2} + \pi\, m;\ \frac{\pi}{2} + \pi\, m)$, дзе m – любы цэлы лік.
50. *Калі функцыя $y = tg\ \varphi$ прымае значэнні, роўныя нулю?*	Значэнні, роўныя нулю, функцыя $y = tg\ \varphi$ прымае там, дзе і функцыя $y = sin\ x$, – у пунктах $x = \pi k$, дзе k – любы цэлы лік.
51. *Калі функцыя $y = tg\ \varphi$ прымае дадатныя значэнні?*	Функцыя $y = tg\ \varphi$ прымае дадатныя значэнні ў тых чвэрцях, дзе сінус і косінус маюць аднолькавыя знакі – г.зн. у I і III чвэрцях. З улікам перыядычнасці функцыі $y = tg\ \varphi$ можна сказаць, што функцыя $y = tg\ \varphi$ прымае дадатныя значэнні на прамежках $(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k)$, дзе k – любы цэлы лік. Або так: $y > 0$, калі $x \in (180^o n;\ 90^o + 180^o n)$, дзе n – любы цэлы лік.
52. *Калі функцыя $y = tg\ \varphi$ прымае адмоўныя значэнні?*	Функцыя $y = tg\ \varphi$ прымае адмоўныя значэнні ў тых чвэрцях, дзе сінус і косінус маюць розныя знакі – г.зн. у II і IV чвэрцях. З улікам перыядычнасці функцыі $y = tg\ \varphi$ можна сказаць, што функцыя $y = tg\ \varphi$ прымае адмоўыя значэнні на прамежках $(\frac{\pi}{2}+\pi\, k;\ \pi+\pi\, k)$, дзе k – любы цэлы лік. Або так: $y < 0$, калі $x \in (90^o+180^o n;\ 180^o+180^o n)$, дзе n – любы цэлы лік.
53. *Чаму функцыя $y = tg\ \varphi$ няцотная?*	Функцыя $y = tg\ \varphi$ **няцотная** таму, што: <u>па-першае</u>, яе **абсяг вызначэння** $(-\frac{\pi}{2}+ \pi\, c;\ \frac{\pi}{2}+ \pi\, c)$ **сіметрычны адносна нуля**; <u>па-другое</u>, пры змяненні знака аргумента φ змяняецца знак (і толькі знак) $tg\ \varphi$ (бо змяняецца знак сінуса, ён няцотны, і не змяняецца знак косінуса, ён цотны, а таму зменіцца знак дробу $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$). Дакладней апошняе можна выказаць так: **супрацьлеглым значэнням аргумента φ адпавядаюць супрацьлеглыя значэнні функцыі $tg\ \varphi$**; або так: $\boldsymbol{tg\ (-\varphi) = -tg\ \varphi}$ для любых $\boldsymbol{\varphi}$ з абсягу вызначэння.

II-4. Катангенс ліку

54. *Якую функцыю называюць **катангенсам** ліку φ?*	**Катангенсам** ліку φ (с$tg\ \varphi$) называюць адносіну косінуса ліку φ да яго сінуса: $ctg\ \varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$.
55. *Якую прамую называюць лініяй катангенсаў?*	**Лініяй катангенсаў** называюць прамую, якая датыкаецца да трыганаметрычнай акружыны ў пункце $\frac{\pi}{2}$.
56. *Якія значэнні можа прымаць катангенс ліку φ?*	Катангенс ліку φ можа прымаць любыя рэчаісныя значэнні (любы лік на лініі катангенсаў можа быць катангенсам нейкага ліку φ на трыганаметрычнай акружыне).
57. *Які абсяг вызначэння функцыі ctg φ?*	Абсяг вызначэння функцыі с$tg\ \varphi$ ствараюць усе рэчаісныя лікі, акрамя πk (дзе k – любы цэлы лік), бо сінусы гэтых лікаў роўныя нулю, а дзяленне на нуль немагчымае. Таму $\varphi \in$ $(\pi c; \pi + \pi c)$, дзе c – любы цэлы лік.
58. *Якімі іншымі ўласцівасцямі валодае функцыя ctg φ?*	Функцыя $ctg\ \varphi$ кавалкава манатонная (мае прамежкі спадання), мае “нулі” і прамежкі знаканязменнасці, не абмежаваная зверху і знізу, няцотная, перыядычная *(іншыя ўласцівасці школьнай праграмай не прадугледжаныя)*.
59. *Які перыяд функцыі ctg φ?*	Катангенс ліку φ на акружыне знаходзяць перасячэннем прамой, якая праходзіць праз гэты пункт і цэнтр акружыны, з лініяй катангенсаў. Таму паварот такой прамой на разгорнуты вугал не зменіць катангенса. Такім чынам, лікі π, 2π, 3π,.. і ўвогуле πn (дзе n – любы цэлы лік) ёсць перыяды катангенса. Найменшы дадатны з іх $\boldsymbol{\pi}$. πn (дзе n – любы цэлы лік) – агульная форма запісу перыяду, які трэба ўлічваць, калі размова ідзе пра аргумент φ функцыі с$tg\ \varphi$.

60. *Які характар манатон-насці функцыі* $y = ctg\ \varphi$?	Функцыя $y = ctg\ \varphi$ не з'яўляецца манатоннай на ўсёй вобласці вызначэння, але мае прамежкі спадання. Функцыя $y = ctg\ \varphi$ спадае ад $+\infty$ да $-\infty$ пры дадатным кірунку руху пункта па “верхняй” дузе трыганаметрычнай акружыны – ад 0 да π (ад 0° да 180°). Паколькі прамежак ад 0 да π мае даўжыню π, а π – гэта перыяд катангенса, то можна сказаць, што функцыя $y = ctg\ \varphi$ спадае на прамежках $(\pi m; \pi + \pi m)$, дзе $m \in Z$.
61. *Калі функцыя* $y = ctg\ \varphi$ *прымае значэнні, роўныя нулю?*	Значэнні, роўныя нулю, функцыя $y = ctg\ \varphi$ прымае там, дзе і функцыя $y = cos\ x$, – у пунктах $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, дзе k – любы цэлы лік.
62. *Калі функцыя* $y = ctg\ \varphi$ *прымае дадатныя значэнні?*	Функцыя $y = ctg\ \varphi$ прымае дадатныя значэнні ў тых чвэрцях, дзе сінус і косінус маюць аднолькавыя знакі – г.зн. у I і III чвэрцях. З улікам перыядычнасці функцыі $y = ctg\ \varphi$ можна сказаць, што функцыя $y = ctg\ \varphi$ прымае дадатныя значэнні на прамежках $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$. Або так: $y > 0$, калі $x \in (180^{\circ} n; 90^{\circ} + 180^{\circ} n)$, $n \in Z$.
63. *Калі функцыя* $y = ctg\ \varphi$ *прымае адмоўныя значэнні?*	Функцыя $y = ctg\ \varphi$ прымае адмоўныя значэнні ў тых чвэрцях, дзе сінус і косінус маюць розныя знакі – г.зн. у II і IV чвэрцях. З улікам перыядычнасці функцыі $y = ctg\ \varphi$ можна сказаць, што функцыя $y = ctg\ \varphi$ прымае адмоўыя значэнні на прамежках $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k)$, дзе k – любы цэлы лік. Або так: $y < 0$, калі $x \in (90^{\circ} + 180^{\circ} n; 180^{\circ} + 180^{\circ} n)$, дзе n – любы цэлы лік.
64. *Чаму функцыя* $y = ctg\ \varphi$ *няцотная?*	Функцыя $y = ctg\ \varphi$ **няцотная** таму, што: <u>па-першае</u>, яе **абсяг вызначэння** $(\pi c; \pi + \pi c)$ **сіметрычны адносна нуля**; <u>па-другое</u>, пры змяненні знака аргумента φ змяняецца знак (і толькі знак) $ctg\ \varphi$ (бо змяняецца знак сінуса, ён няцотны, і не змяняецца знак косінуса, ён цотны, а таму зменіцца знак дробу $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$). Дакладней апошняе можна выказаць так: **супрацьлеглым значэнням аргумента** $\boldsymbol{\varphi}$ **адпавядаюць супрацьлеглыя значэнні функцыі** $\boldsymbol{ctg\ \varphi}$; або так: $\boldsymbol{ctg(-\varphi) = -ctg\ \varphi}$ для любых $\boldsymbol{\varphi}$ з абсягу вызначэння.

III-1. Арксінус ліку

65. *Што называюць* ***арксінусам*** *ліку* ***a****?*	**Арксінусам ліку *a*** (arc*sin a*), узятага з прамежку [–1;1], называюць лік ***b*** з прамежку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, сінус якога роўны ***a***. Адпаведна гэтаму азначэнню, роўнасці *arcsin a = b* і *sin b = a* раўназначныя пры ўмове, што $a \in [-1;1]$, $b \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
66. *Які абсяг вызначэння функцыі* $y = \arcsin x$ *?*	Адпаведна прыведзенаму вышэй азначэнню, абсягам вызначэння функцыі $y = \arcsin x$ з'яўляецца мноства [–1;1] або нейкае яго падмноства, калі гэта асобна адзначана.
67. *Якое мноства значэнняў функцыі* $y = \arcsin x$ *?*	Адпаведна прыведзенаму вышэй азначэнню, функцыя $y = \arcsin x$ прымае значэнні з прамежку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ("правая" частка трыганаметрычнай акружыны, IV і I яе чвэрці; гэтую дугу называюць **лініяй арксінусаў**).
68. *Якімі іншымі ўласцівасцямі валодае функцыя* $y = \arcsin x$ *?*	Функцыя $y = \arcsin x$ нарастальная, мае адзін "нуль" і два прамежкі знаканязменнасці, абмежаваная зверху і знізу, мае найбольшае і найменшае значэнні, няцотная (*іншыя ўласцівасці школьнай праграмай не прадугледжаныя*).
69. *Калі функцыя* $y = \arcsin x$ *прымае найбольшае значэнне?*	Найбольшае значэнне, роўнае $\frac{\pi}{2}$, функцыя $y = \arcsin x$ прымае пры $x = 1$.
70. *Калі функцыя* $y = \arcsin x$ *прымае найменшае значэнне?*	Найменшае значэнне, роўнае $-\frac{\pi}{2}$, функцыя $y = \arcsin x$ прымае пры $x = -1$.
71. *Калі функцыя* $y = \arcsin x$ *прымае значэнне, роўнае нулю?*	Значэнне, роўнае нулю, функцыя $y = \arcsin x$ прымае пры $x = 0$.
72. *Калі функцыя* $y = \arcsin x$ *прымае дадатныя значэнні?*	Функцыя $y = \arcsin x$ прымае дадатныя значэнні, калі $x \in (0; 1]$. Або так: $y > 0$, калі $0 < x \le 1$.
73. *Калі функцыя* $y = \arcsin x$ *прымае адмоўныя значэнні?*	Функцыя $y = \arcsin x$ прымае адмоўныя значэнні, калі $x \in [-1; 0)$. Або так: $y < 0$, калі $-1 \le x < 0$.
74. *Чаму функцыя*	Функцыя $y = \arcsin x$ няцотная таму,

$y = arcsin\ x$ няцотная?	што: <u>па-першае</u>, яе абсяг вызначэння [–1;1] сіметрычны адносна нуля; <u>па-другое</u>, $arcsin(-x) = -arcsin\ x$ для любых x з гэтага абсягу (што вынікае з адпаведнай уласцівасці функцыі $y = sin\ x$).

III-2. Арккосінус ліку

75. *Што называюць **арккосінусам** ліку а?*	**Арккосінусам ліку *a*** ($arccos\ a$), узятага з прамежку [–1; 1], называюць лік b з прамежку $[0; \pi]$, калі $cos\ b = a$. Адпаведна гэтаму азначэнню, роўнасці $arccos\ a = b$ і $cos\ b = a$ раўназначныя пры ўмове, што $a \in [-1; 1]$, $b \in [0; \pi]$.
76. *Які абсяг вызначэння функцыі $y = arccos\ x$?*	Адпаведна прыведзенаму вышэй азначэнню, абсягам вызначэння функцыі $y = arccos\ x$ з'яўляецца мноства [–1;1] або нейкае яго падмноства, калі гэта асобна адзначана.
77. *Якое мноства значэнняў функцыі $y = arccos\ x$?*	Адпаведна прыведзенаму вышэй азначэнню, функцыя $y = arccos\ x$ прымае значэнні з прамежку $[0; \pi]$ ("верхняя" частка трыганаметрычнай акружыны, I і II яе чвэрці; гэтую дугу называюць **лініяй арккосінусаў**).
78. *Якімі іншымі ўласцівасцямі валодае функцыя $y = arccos\ x$?*	Функцыя $y = arccos\ x$ спадальная, мае адзін "нуль" і адзін прамежак знаканязменнасці, абмежаваная зверху і знізу, мае найбольшае і найменшае значэнні, не мае цотнасці (*іншыя ўласцівасці школьнай праграмай не прадугледжаныя*).
79. *Калі функцыя $y = arccos\ x$ прымае найбольшае значэнне?*	Найбольшае значэнне, роўнае π, функцыя $y = arccos\ x$ прымае пры $x = -1$.
80. *Калі функцыя $y = arccos\ x$ прымае найменшае значэнне?*	Найменшае значэнне, роўнае нулю, функцыя $y = arccos\ x$ прымае пры $x = 1$.
81. *Калі функцыя $y = arccos\ x$ прымае значэнне, роўнае нулю?*	Значэнне, роўнае нулю, функцыя $y = arccos\ x$ прымае пры $x = 1$.
82. *Калі функцыя*	Функцыя $y = arccos\ x$ прымае дадатныя

y = arccos x прымае дадатныя значэнні?	значэнні, калі $x \in [-1; 1)$. Або так: $y > 0$, калі $-1 \le x < 1$.
83. *Калі функцыя y = arccos x прымае адмоўныя значэнні?*	Функцыя y = *arccos* x адмоўных значэнняў не мае.
84. *Чаму функцыя y = arccos x спадальная?*	Паколькі функцыя y = *arccos* x з'яўляецца адваротнай для функцыі y = *cos* x з абсягам вызначэння $[0; \pi]$ і функцыя y = *cos* x спадае на прамежку $[0; \pi]$, то функцыя y = *arccos* x таксама спадальная.
85. *Чаму функцыя y = arccos x не мае цотнасці?*	Функцыя y = *arccos* x не мае цотнасці таму, што, хаця яе абсяг вызначэння $[-1; 1]$ сіметрычны адносна нуля, але не выконваецца ні адна з роўнасцяў *arccos* $(-x)$ = *arccos* x ці *arccos* $(-x) = -$ *arccos* x для любых x з гэтага прамежку. Напрыклад, *arccos* $(-1) = \pi \neq$ *arccos* 1 і *arccos* $(-1) \neq -$ *arccos* 1, бо арккосінус адзінкі роўны нулю.

III-3. Арктангенс ліку

86. *Што называюць* ***арктангенсам*** *ліку* ***a****?*	**Арктангенсам любога ліку *a*** (*arctg a*), называюць лік ***b*** з прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якога роўны ***a***. Адпаведна гэтаму азначэнню, роўнасці *arctg* $a = b$ і *tg* $b = a$ раўназначныя пры ўмове, што $b \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
87. *Які абсяг вызначэння функцыі y = arctg x ?*	Адпаведна прыведзенаму вышэй азначэнню, абсягам вызначэння функцыі y = *arctg* x з'яўляецца мноства $(-\infty; +\infty)$ або нейкае яго падмноства, калі гэта асобна адзначана.

88. *Якое мноства значэнняў функцыі $y = arctg\, x$?*	Адпаведна прыведзенаму вышэй азначэнню, функцыя $y = arctg\, x$ прымае значэнні з прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ("правая" частка трыганаметрычнай акружыны без канцовых пунктаў, I і IV яе чвэрці; гэтую адкрытую дугу называюць **лініяй арктангенсаў**).
89. *Якімі іншымі ўласцівасцямі валодае функцыя $y = arctg\, x$?*	Функцыя $y = arctg\, x$ нарастальная, мае адзін "нуль" і два прамежкі знаканязменнасці, абмежаваная зверху і знізу, не мае найбольшага і найменшага значэнняў, няцотная (*іншыя ўласцівасці школьнай праграмай не прадугледжаныя*).
90. *Калі функцыя $y = arctg\, x$ прымае значэнне, роўнае 0?*	Значэнне, роўнае нулю, функцыя $y = arctg\, x$ прымае пры $x = 0$.
91. *Калі функцыя $y = arctg\, x$ прымае дадатныя значэнні?*	Функцыя $y = arctg\, x$ прымае дадатныя значэнні, калі $x \in (0; +\infty)$. Або так: $y > 0$, калі $x > 0$.
92. *Калі функцыя $y = arctg\, x$ прымае адмоўныя значэнні?*	Функцыя $y = arctg\, x$ прымае адмоўныя значэнні, калі $x \in (-\infty; 0)$. Або так: $y < 0$, калі $x < 0$.
93. *Чаму функцыя $y = arctg\, x$ нарастальная?*	Паколькі функцыя $y = arctg\, x$ з'яўляецца адваротнай для функцыі $y = tg\, x$ з абсягам вызначэння $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і функцыя $y = tg\, x$ нарастае на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то функцыя $y = arctg\, x$ таксама нарастальная.
94. *Чаму функцыя $y = arctg\, x$ няцотная?*	Функцыя $y = arctg\, x$ няцотная таму, што: <u>па-першае</u>, яе абсяг вызначэння $(-\infty; +\infty)$ сіметрычны адносна нуля; <u>па-другое</u>, $arctg\,(-x) = -\, arctg\, x$ для любых x з гэтага абсягу (што вынікае з адпаведнай уласцівасці функцыі $y = tg\, x$).

III-4. Арккатангенс ліку

95. *Якую функцыю называюць **аркка-тангенсам** ліку а?*	Арккатангенсам любога ліку a ($arcctg\ a$) называюць лік $\boldsymbol{b}$ з прамежку (0; π), катангенс якога роўны $\boldsymbol{a}$. Адпаведна гэтаму азначэнню, роўнасці $arcctg\ a = b$ і $ctg\ b = a$ раўназначныя пры ўмове, што $b \in (0; \pi)$.
96. *Які абсяг вызначэння функцыі $y = arcctg\ x$?*	Адпаведна прыведзенаму вышэй азначэнню, абсягам вызначэння функцыі $y = arcctg\ x$ з'яўляецца мноства $(-\infty; +\infty)$ або нейкае яго падмноства, калі гэта асобна адзначана.
97. *Якое мноства значэнняў функцыі $y = arctg\ x$?*	Адпаведна прыведзенаму вышэй азначэнню, функцыя $y = arcctg\ x$ прымае значэнні з прамежку (0; π) ("верхняя" частка трыганаметрычнай акружыны без канцовых пунктаў, I і II яе чвэрці; гэтую адкрытую дугу называюць **лініяй арккатангенсаў**).
98. *Якімі іншымі ўласцівасцямі валодае функцыя $y = arcctg\ x$?*	Функцыя $y = arcctg\ x$ спадальная, не мае "нулёў", мае адзін прамежак знаканязменнасці, абмежаваная зверху і знізу, не мае найбольшага і найменшага значэнняў, не мае цотнасці (*іншыя ўласцівасці школьнай праграмай не прадугледжаныя*).
99. *Калі функцыя $y = arcctg\ x$ прымае значэнне, роўнае 0?*	Значэння, роўнага нулю, функцыя $y = arcctg\ x$ не прымае ні пры якіх x.
100. *Калі функцыя $y = arcctg\ x$ прымае дадатныя значэнні?*	Функцыя $y = arcctg\ x$ прымае дадатныя значэнні на ўсім абсягу вызначэння $(-\infty; +\infty)$.
101. *Калі функцыя $y = arcctg\ x$ прымае адмоўныя значэнні?*	Функцыя $y = arcctg\ x$ адмоўных значэнняў не мае.
102. *Чаму функцыя $y = arcctg\ x$ спадальная?*	Паколькі функцыя $y = arcctg\ x$ з'яўляецца адваротнай для функцыі $y = ctg\ x$ з абсягам вызначэння $(0; \pi)$ і функцыя $y = ctg\ x$ спадае на прамежку $(0; \pi)$, то функцыя $y = arcctg\ x$ таксама спадальная.

103. *Чаму функцыя $y = arcctg\, x$ не мае цотнасці?*	Функцыя $y = arcctg\, x$ не мае цотнасці таму, што, хаця яе абсяг вызначэння $(-\infty; +\infty)$ сіметрычны адносна нуля, але не выконваецца ні адна з роўнасцяў $arcctg\,(-x) = -\, arcctg\, x$ ці $arcctg\,(-x) = arcctg\, x$ для x з гэтага абсягу.

III-5. Асноўныя значэнні аркфункцый

$Arcsin\,(-1)$	$= -\frac{\pi}{2}$
$Arcsin\,(-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$= -\frac{\pi}{3}$
$Arcsin\,(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$= -\frac{\pi}{4}$
$Arcsin\,(-\frac{1}{2})$	$= -\frac{\pi}{6}$
$Arcsin\, 0$	$= 0$
$Arcsin\, \frac{1}{2}$	$= \frac{\pi}{6}$
$Arcsin\, \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{\pi}{4}$
$Arcsin\, \frac{\sqrt{3}}{2}$	$= \frac{\pi}{3}$
$Arcsin\, 1$	$= \frac{\pi}{2}$
$Arctg\,(-\sqrt{3})$	$= -\frac{\pi}{3}$
$Arctg\,(-1)$	$= -\frac{\pi}{4}$
$Arctg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$= -\frac{\pi}{6}$
$Arctg\, 0$	$= 0$
$Arctg\, \frac{\sqrt{3}}{3}$	$= \frac{\pi}{6}$
$Arctg\, 1$	$= \frac{\pi}{4}$
$Arctg\, \sqrt{3}$	$= \frac{\pi}{3}$

$Arccos\,(-1)$	$= \pi$
$Arccos\,(-\frac{\sqrt{3}}{2})$	$= \frac{5\pi}{6}$
$Arccos\,(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$= \frac{3\pi}{4}$
$Arccos\,(-\frac{1}{2})$	$= \frac{2\pi}{3}$
$Arccos\, 0$	$= \frac{\pi}{2}$
$Arccos\, \frac{1}{2}$	$= \frac{\pi}{3}$
$Arccos\, \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{\pi}{4}$
$Arccos\, \frac{\sqrt{3}}{2}$	$= \frac{\pi}{6}$
$Arccos\, 1$	$= 0$
$Arcctg\,(-\sqrt{3})$	$= \frac{5\pi}{6}$
$Arcctg\,(-1)$	$= \frac{3\pi}{4}$
$Arcctg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$= \frac{2\pi}{3}$
$Arcctg\, 0$	$= \frac{\pi}{2}$
$Arcctg\, \frac{\sqrt{3}}{3}$	$= \frac{\pi}{3}$
$Arcctg\, 1$	$= \frac{\pi}{4}$
$Arcctg\, \sqrt{3}$	$= \frac{\pi}{6}$

IV. Формулы трыганаметрыі

104. *Азначэнні тангенса і катангенса ліку і выснова з іх.*	$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow tg\,x\; ctg\,x = 1$.
105. *Асноўная трыганаметрычная тоеснасць і высновы з яе.*	$sin^2 x + cos^2 x = 1$; паскладовым дзяленнем на $cos^2 x$ атрымаем: $tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, а паскладовым дзяленнем на $sin^2 x$ атрымаем: $1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.
106. *Формулы прывядзення для* $\frac{\pi}{2} - x$.	$\frac{\pi}{2} - x$ – умоўны лік з першай чвэрці, дзе ўсе трыганаметрычныя функцыі дадатныя, акрамя таго $\frac{\pi}{2}$ змяняе функцыю, таму: $sin\,(\frac{\pi}{2} - x) = cos\,x$, $cos\,(\frac{\pi}{2} - x) = sin\,x$, $tg\,(\frac{\pi}{2} - x) = ctg\,x$, $ctg\,(\frac{\pi}{2} - x) = tg\,x$.
107. *Формулы прывядзення для* $\frac{\pi}{2} + x$.	$\frac{\pi}{2} + x$ – умоўны лік з другой чвэрці, дзе сінус дадатны, а іншыя функцыі адмоўныя, акрамя таго $\frac{\pi}{2}$ змяняе функцыю, таму: $sin\,(\frac{\pi}{2} + x) = cos\,x$, $cos\,(\frac{\pi}{2} + x) = -sin\,x$, $tg\,(\frac{\pi}{2} + x) = -ctg\,x$, $ctg\,(\frac{\pi}{2} + x) = -tg\,x$.
108. *Формулы прывядзення для* $\pi - x$.	$\pi - x$ – умоўны лік з другой чвэрці, дзе сінус дадатны, а іншыя функцыі адмоўныя, акрамя таго π не змяняе функцыі, таму: $sin\,(\pi - x) = sin\,x$, $cos\,(\pi - x) = -cos\,x$, $tg\,(\pi - x) = -tg\,x$, $ctg\,(\pi - x) = -ctg\,x$.
109. *Формулы прывядзення для* $\pi + x$.	$\pi + x$ – умоўны лік з трэцяй чвэрці, дзе косінус і сінус адмоўныя, а тангенс і катангенс дадатныя, акрамя таго π не змяняе функцыі, таму: $sin\,(\pi + x) = -sin\,x$, $cos\,(\pi + x) = -cos\,x$, $tg\,(\pi + x) = tg\,x$, $ctg\,(\pi + x) = ctg\,x$.

110. *Формулы прывядзення для* $\frac{3\pi}{2} - x$.	$\frac{3\pi}{2} - x$ – умоўны лік з трэцяй чвэрці, дзе сінус і косінус адмоўныя, а іншыя функцыі дадатныя, акрамя таго $\frac{3\pi}{2}$ змяняе функцыю, таму: $sin\,(\frac{3\pi}{2} - x) = -cos\,x$, $cos\,(\frac{3\pi}{2} - x) = -sin\,x$, $tg\,(\frac{3\pi}{2} - x) = ctg\,x$, $ctg\,(\frac{3\pi}{2} - x) = tg\,x$.
111. *Формулы прывядзення для* $\frac{3\pi}{2} + x$.	$\frac{3\pi}{2} + x$ – умоўны лік з чацвёртай чвэрці, дзе косінус дадатны, а іншыя функцыі адмоўныя, акрамя таго $\frac{3\pi}{2}$ змяняе функцыю, таму: $sin\,(\frac{3\pi}{2} + x) = -cos\,x$, $cos\,(\frac{3\pi}{2} + x) = sin\,x$, $tg\,(\frac{3\pi}{2} + x) = -ctg\,x$, $ctg\,(\frac{3\pi}{2} + x) = -tg\,x$.
112. *Формулы прывядзення для* $2\pi - x$.	$2\pi - x$ – умоўны лік з чацвёртай чвэрці, дзе косінус дадатны, а іншыя функцыі адмоўныя, акрамя таго 2π не змяняе функцыі, таму: $sin\,(2\pi - x) = -sin\,x$, $cos\,(2\pi - x) = cos\,x$, $tg\,(2\pi - x) = -tg\,x$, $ctg\,(2\pi - x) = -ctg\,x$. Гэта можна патлумачыць таксама адыманнем перыяду 2π і ўласцівасцямі цотнасці функцый.
113. *Косінус сумы двух лікаў.*	$\boldsymbol{cos\,(x + y) = cos\,x\,cos\,y - sin\,x\,sin\,y}$ для любых x і y.
114. *Косінус рознасці двух лікаў.*	$\boldsymbol{cos\,(x - y) = cos\,x\,cos\,y + sin\,x\,sin\,y}$ для любых x і y.
115. *Сінус сумы двух лікаў.*	$\boldsymbol{sin\,(x + y) = sin\,x\,cos\,y + cos\,x\,sin\,y}$ для любых x і y.
116. *Сінус рознасці двух лікаў.*	$\boldsymbol{sin\,(x - y) = sin\,x\,cos\,y - cos\,x\,sin\,y}$ для любых x і y.
117. *Тангенс сумы двух лікаў.*	$\boldsymbol{tg\,(x + y) =} \frac{tgx + tgy}{1 - tgxtgy}$ для любых x і y, акрамя $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$ і $x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, дзе k – любы цэлы лік, бо тангенсы такіх лікаў не існуюць.

118. *Тангенс рознасці двух лікаў.*	$\boldsymbol{tg\ (x - y)} = \frac{tgx - tgy}{1 + tgxtgy}$ для любых x і y, акрамя $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$ і $x - y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, дзе k – любы цэлы лік, бо тангенсы такіх лікаў не існуюць.
119. *Сінус падвоенага аргумента.*	$\boldsymbol{sin\ 2x = 2sin\ x\ cos\ x}$ для любых x. Атрымоўваецца з формулы $sin\ (x + y) = sin\ x\ cos\ y + cos\ x\ sin\ y$ заменай y на x.
120. *Косінус падвоенага аргумента (усе варыянты).*	$\boldsymbol{cos\ 2x = cos^2\ x - sin^2\ x}$ для любых x. Атрымоўваецца з формулы $cos\ (x + y) = cos\ x\ cos\ y - sin\ x\ sin\ y$ заменай y на x. Скарыстоўваючы асноўную трыганаметрычную тоеснасць, выйдзем на іншыя варыянты гэтай формулы: $\boldsymbol{cos\ 2x = 2cos^2\ x - 1}$; $\boldsymbol{cos\ 2x = 1 - 2sin^2\ x}$.
121. *Тангенс падвоенага аргумента.*	$\boldsymbol{tg\ 2x} = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$ для любых x, акрамя тых, для якіх $tg\ x$ і $tg\ 2x$ не існуюць: $x \neq \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$. Атрымоўваецца з формулы $tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgxtgy}$ заменай y на x.
122. *Формулы паніжэння ступені.*	$\boldsymbol{sin^2\ x = 0{,}5(1 - cos\ 2x)}$ для любых x, $\boldsymbol{cos^2\ x = 0{,}5(1 + cos\ 2x)}$ для любых x. Атрымоўваюцца з формул $cos\ 2x = 1-2sin^2\ x$ і $cos\ 2x = 2cos^2\ x - 1$.
123. *Сінус палавіннага аргумента.*	$sin\ \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ для любых x. Атрымоўваецца з формулы $sin^2\ x = 0{,}5(1 - cos\ 2x)$ заменай x на $\frac{x}{2}$.
124. *Косінус палавіннага аргумента.*	$cos\ \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ для любых x. Атрымоўваецца з формулы $cos^2\ x = 0{,}5(1 + cos\ 2x)$ заменай x на $\frac{x}{2}$.

125. *Тангенс палавіннага аргумента.*	$tg\ \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ або $tg\ \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ для любых $x \neq \pi n$, $n \in Z$.
126. *Здабытак сінусаў.*	$\boldsymbol{sin\ x\ sin\ y = -0,5(cos\ (x+y) - cos\ (x-y))}$ для любых x і y. Атрымоўваецца адыманнем роўнасцяў $cos\ (x+y) = cos\ x\ cos\ y - sin\ x\ sin\ y$ і $cos\ (x-y) = cos\ x\ cos\ y + sin\ x\ sin\ y$.
127. *Здабытак косінусаў.*	$\boldsymbol{cos\ x\ cos\ y = 0,5\ (cos\ (x+y) + cos\ (x-y))}$ для любых x і y. Атрымоўваецца складаннем роўнасцяў $cos\ (x+y) = cos\ x\ cos\ y - sin\ x\ sin\ y$ і $cos\ (x-y) = cos\ x\ cos\ y + sin\ x\ sin\ y$.
128. *Здабытак сінуса на косінус.*	$\boldsymbol{sin\ x\ cos\ y = 0,5(sin\ (x+y) + sin\ (x-y))}$ для любых x і y. Атрымоўваецца складаннем роўнасцяў $sin\ (x+y) = sin\ x\ cos\ y + cos\ x\ sin\ y$ і $sin\ (x-y) = sin\ x\ cos\ y - cos\ x\ sin\ y$.
129. *Сума сінусаў.*	$\boldsymbol{sin\ x + sin\ y = 2sin\frac{x+y}{2}cos\ \frac{x-y}{2}}$ для любых x і y. Атрымоўваецца з формулы $sin\ x\ cos\ y = 0,5(sin\ (x+y) + sin\ (x-y))$ заменай x на $\frac{x+y}{2}$ і y на $\frac{x-y}{2}$.
130. *Рознасць сінусаў.*	$\boldsymbol{sin\ x - sin\ y = 2sin\frac{x-y}{2}cos\ \frac{x+y}{2}}$ для любых x і y. Атрымоўваецца з формулы сумы сінусаў заменай y на $-y$.
131. *Сума косінусаў.*	$\boldsymbol{cos\ x + cos\ y = 2cos\frac{x+y}{2}cos\ \frac{x-y}{2}}$ для любых x і y. Атрымоўваецца з формулы $cos\ x\ cos\ y = 0,5\ (cos\ (x+y) + cos\ (x-y))$ заменай x на $\frac{x+y}{2}$ і y на $\frac{x-y}{2}$.
132. *Рознасць косінусаў.*	$\boldsymbol{cos\ x - cos\ y = -2\ sin\ \frac{x+y}{2}sin\ \frac{x-y}{2}}$ для любых x і y. Атрымоўваецца з формулы $sin\ x\ sin\ y = -0,5(cos\ (x+y) - cos\ (x-y))$ заменай x на $\frac{x+y}{2}$ і y на $\frac{x-y}{2}$.

V. Трыганаметрычныя раўнанні і няроўнасці

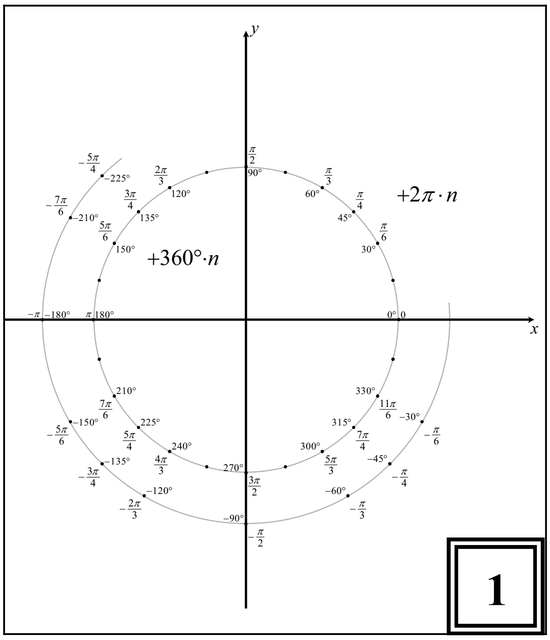
133. *Развязванне раўнання* ***sin x = a***.	Калі $\|a\| > 1$, то раўнанне кораняў не мае. Калі $a = 1$, то раўнанне ***sin x* = 1** мае корані $x = \frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in Z$. Калі $a = -1$, то раўнанне ***sin x* = –1** мае корані $x = -\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\in Z$. Калі $a = 0$, то раўнанне ***sin x* = 0** мае корані $x = n\pi$, $n\in Z$. Калі $\|a\| \le 1$, то раўнанне ***sin x = a*** мае корані $\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin a + n\pi}$, $n\in Z$.
134. *Развязванне раўнання* ***cos x = a***.	Калі $\|a\| > 1$, то раўнанне кораняў не мае. Калі $a = 1$, то раўнанне ***cos x* = 1** мае корані $x = 2n\pi$, $n\in Z$. Калі $a = -1$, то раўнанне ***cos x* = –1** мае корані $x = -\pi + 2n\pi$, $n\in Z$. Калі $a = 0$, то раўнанне ***cos x* = 0** мае корані $x = \frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in Z$. Калі $\|a\| \le 1$, то раўнанне ***cos x = a*** мае корані $\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2n\pi}$, $n\in Z$.
135. *Развязванне раўнання* ***tg x = a***.	Пры любым a раўнанне ***tg x = a*** развязваецца па формуле $\boldsymbol{x = \mathrm{arctg}\, a + n\pi}$, $n\in Z$.
136. *Развязванне раўнання* ***ctg x = a***.	Пры любым a раўнанне ***ctg x = a*** развязваецца па формуле $\boldsymbol{x = \mathrm{arcctg}\, a + n\pi}$, $n\in Z$.
137. *Развязванне трыганаметрычных раўнанняў прыёмам падстаноўкі.*	Калі раўнанне змяшчае толькі адну трыганаметрычную функцыю з адным і тым жа аргументам, то, замяніўшы гэтую функцыю якой-небудзь літарай, атрымаем звычайнае алгебраічнае раўнанне. Напрыклад, у раўнанні $\frac{6\cos 6x+2}{6\cos^2 6x+5\cos 6x+1}=1$ прысутнічае толькі адна трыганаметрычная функцыя *cos* 6*x*. Падстаноўкай *cos* 6*x* = *y* атрымаем алгебраічнае раўнанне $\frac{6y+2}{6y^2+5y+1}=1$. Развязак гэтага раўнання прывядзе да аднаго ці некалькіх прасцейшых трыганаметрычных раўнанняў кшталту *cos* 6*x* = *a*.

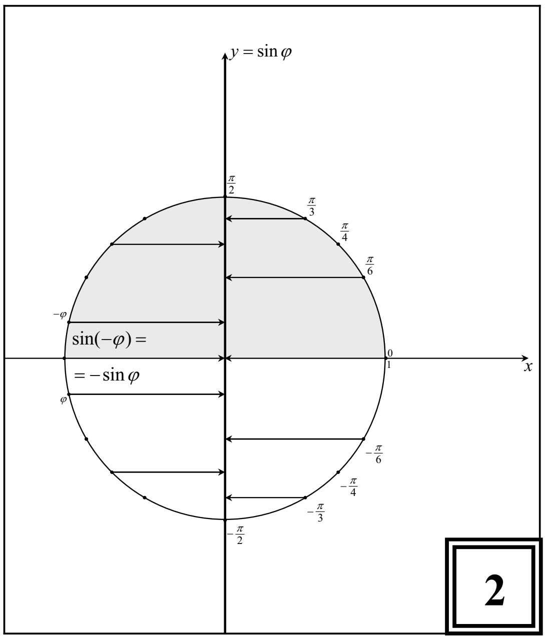
138. ***Аднародныя*** *трыгана-метрычныя раўнанні і прыём іх развязвання.*	**Аднародным** трыганаметрычным раўнаннем n-й ступені называецца такое раўнанне, якое змяшчае дзве розныя трыганаметрычныя функцыі (звычайна сінус і косінус) аднаго аргумента, прычым усе складнікі такога раўнання маюць n-ю ступень адносна гэтых функцый. Напрыклад, раўнанне $5sin^3 x - 2sin^2 x\, cos\, x - 3cos^3 x = 0$ з'яўляецца аднародным раўнаннем трэцяй ступені, бо яно змяшчае тры складнікі трэцяй ступені адносна $sin\ x$ і $cos\ x$. Такія раўнанні развязваюцца дзяленнем на адну з функцый у ступені, роўнай ступені раўнання – тут на $sin^3 x$ або $cos^3 x$. Пры дзяленні на $sin^3 x$ атрымаецца раўнанне $5 - 2\mathrm{ctg}\ x - 3\mathrm{ctg}^3\ x = 0$, а пры дзяленні на $cos^3 x$ атрымаецца раўнанне з тангенсам $5\mathrm{tg}^3\ x - 2\mathrm{tg}^2\ x - 3 = 0$. Далей прыёмам падстаноўкі пераходзяць да развязвання алгебраічнага раўнання. (*Перад дзяленнем трэба праверыць, ці можа быць гэты дзельнік роўны нулю!*)
139. *Трыгана-метрычныя раўнанні, якія зводзяцца да аднародных.*	Калі раўнанне змяшчае сінус і косінус аднаго аргумента і ступені яго складнікаў адрозніваюцца на цотны лік, то яго можна зрабіць аднародным дамнажэннем складнікаў з меншай ступенню на трыганаметрычную адзінку ці на трыганаметрычную адзінку ў пэўнай ступені. Напрыклад, раўнанне $3sin^2 x - sin\, 2x + 4 = 5cos^2 x$ не аднародане, але, калі скарыстаць формулу сінуса падвоенага аргумента і дамножыць 4 (складнік нулявой ступені) на трыганаметрычную адзінку, то яно стане аднародным. Раўнанне $4cos^5 x = sin\ x$ можна зрабіць аднародным раўнаннем пятай ступені, дамножыўшы складнік першай ступені ($sin\ x$) на квадрат трыганаметрычнай адзінкі. Калі ж розніца ў ступенях складнікаў няцотная, то можна падвоіць ступені, скарыстаўшы формулы падвоеных аргументаў. Напрыклад, раўнанне $sin\ x + cos\ x = 1$ можна зрабіць аднародным раўнаннем другой ступені, замяніўшы $sin\ x$ на $2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}$, $cos\ x$ на $cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}$, а адзінку на $sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}$.

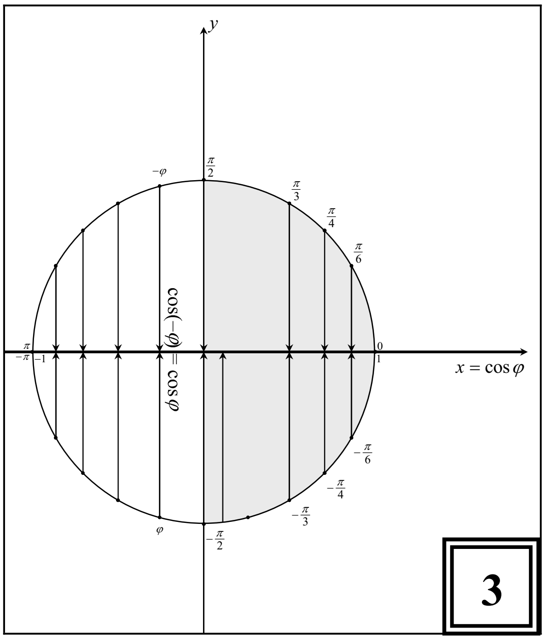
140. *Раўнанне* *$a\sin x + b\cos x = c$* *і яго развязванне.*	Скарыстаўшы формулы падвоеных аргументаў і дамножыўшы *c* на трыганаметрычную адзінку з такім жа аргументам, атрымаем аднароднае раўнанне. Але для такіх раўнанняў ёсць адмысловы прыём. Падзяліўшы ўсе складнікі на $\sqrt{a^2+b^2}$, атрымаем такія каэфіцыенты ў левай частцы раўнання, сума квадратаў якіх роўна 1. Тады адзін з іх можна замяніць на косінус нейкага ліку φ, другі – на сінус таго ж ліку. І раўнанне пераўтвараецца ў раўнанне з адной трыганаметрычнай функцыяй: $\sin(x \pm \varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (ці $\cos(x \pm \varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$).
141. *Развязак раўнання $tg\, x = tg\, a$, дзе a – любы лік.*	$\boldsymbol{x = a + \pi k}$, $k \in Z$.
142. *Развязак раўнання $ctg\, x = ctg\, a$, дзе a – любы лік.*	$\boldsymbol{x = a + \pi k}$, $k \in Z$.
143. *Развязак раўнання $\cos x = \cos a$, дзе a – любы лік.*	$\boldsymbol{x = \pm a + 2\pi k}$, $k \in Z$.
144. *Развязак раўнання $\sin x = \sin a$, дзе a – любы лік.*	$\boldsymbol{x = (-1)^k a + \pi k}$, $k \in Z$.
145. *Развязак няроўнасці $\sin x > a$, дзе $\lvert a \rvert < 1$.*	$(\boldsymbol{\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k})$, $k \in Z$.
146. *Развязак няроўнасці $\sin x < a$, дзе $\lvert a \rvert < 1$.*	$(\boldsymbol{-\pi - \arcsin a + 2\pi k; \arcsin a + 2\pi k})$, $k \in Z$.

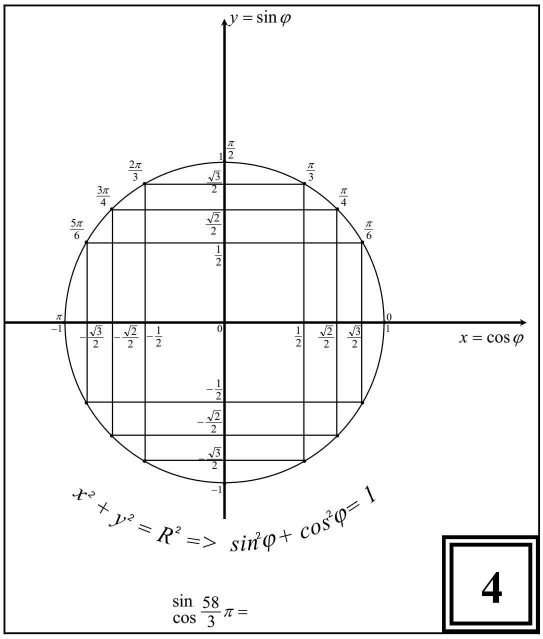
147. *Развязак няроўнасці cos x > a, дзе |a| < 1.*	$(-\arccos a + 2\pi k;\ \arccos a + 2\pi k)$, $k \in Z$.
148. *Развязак няроўнасці cos x < a, дзе |a| < 1.*	$(\arccos a + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k)$, $k \in Z$.
149. *Развязак няроўнасці tg x > a.*	$(\mathrm{arctg}\, a + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in Z$.
150. *Развязак няроўнасці tg x < a.*	$(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \mathrm{arctg}\, a + \pi k)$, $k \in Z$.
151. *Развязак няроўнасці ctg x > a.*	$(\pi k;\ \mathrm{arcctg}\, a + \pi k)$, $k \in Z$.
152. *Развязак няроўнасці ctg x < a.*	$(\mathrm{arcctg}\, a + \pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

Зараз давайце паўторым тое, што вы ўжо ведаеце. Ніжэй пададзены малюнкі , якія змяшчаюць ужо ўспрынятую вамі інфармацыю. Кожны знак гэтага малюнка – сігнал для вашай памяці, таму такія малюнкі называюць лістом апорных сігналаў (ЛАС).









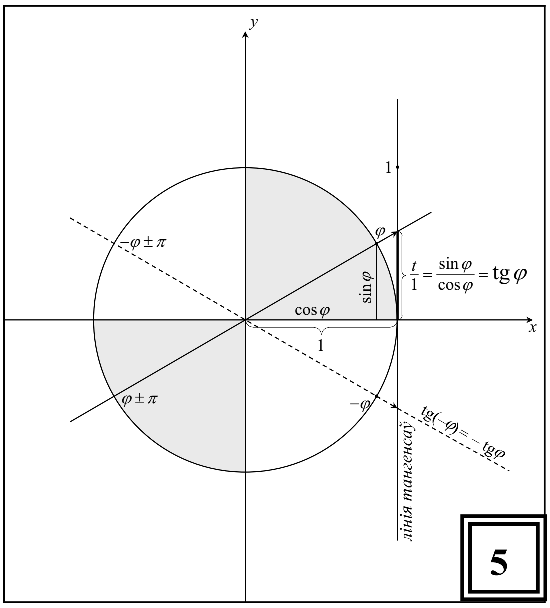
ЛАС1 нагадвае пра структуру трыганаметрычнай акружыны ў градусах і радыянах з дадатным і адмоўным кірункам руху па ёй. Разгледзьце ўважліва ЛАС1 і падумайце: ці зможаце вы ўзнавіць яго па памяці? Зможаце? – вось і паспрабуйце!

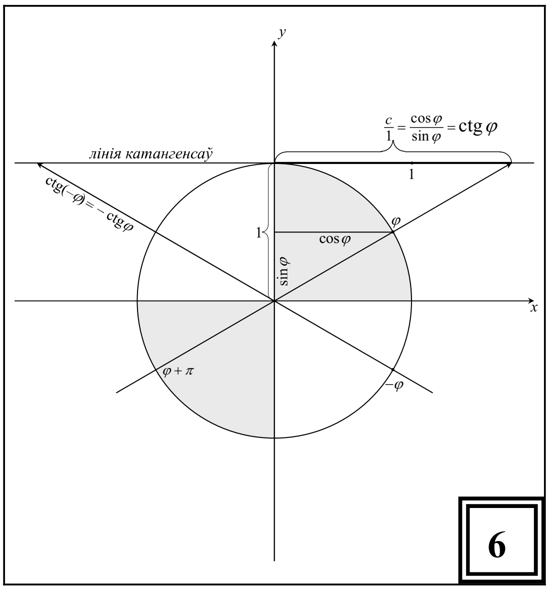
Калі ваша спроба атрымалася ўдалай, то чытаць трыганаметрычную акружыну вы ўмееце.

Цяпер пераключаемся на ЛАС2. ЛАС2 нагадвае пра тое, што такое сінус ліку, дзе і як яго знаходзяць, а таксама пра асноўныя яго ўласцівасці. Ці ўзгадаеце вы тыя ўласцівасці, разглядаючы малюнак? А ўласцівасці косінуса ліку на ЛАС3?

ЛАС4 змяшчае асноўную трыганаметрычную тоеснасць, выведзеную з раўнання трыганаметрычнай акружыны і азначэнняў сінуса і косінуса ліку і нагадвае пра тое, што для шаснаццаці пунктаў акружыны вы павінны ведаць дакладныя значэнні гэтых трыганаметрычных функцый. Апорны сігнал знізу малюнка нагадвае пра тое, што гэтыя 16 пунктаў маюць бясконцае мноства каардынат на акружыне, таму вы павінны знаходзіць дакладныя значэнні сінусаў і косінусаў любых лікаў кшталту $n\pi$, $\frac{n\pi}{2}$, $\frac{n\pi}{3}$, $\frac{n\pi}{4}$, $\frac{n\pi}{6}$, дзе n – любы цэлы лік. Умееце?

Тады ідзем далей.

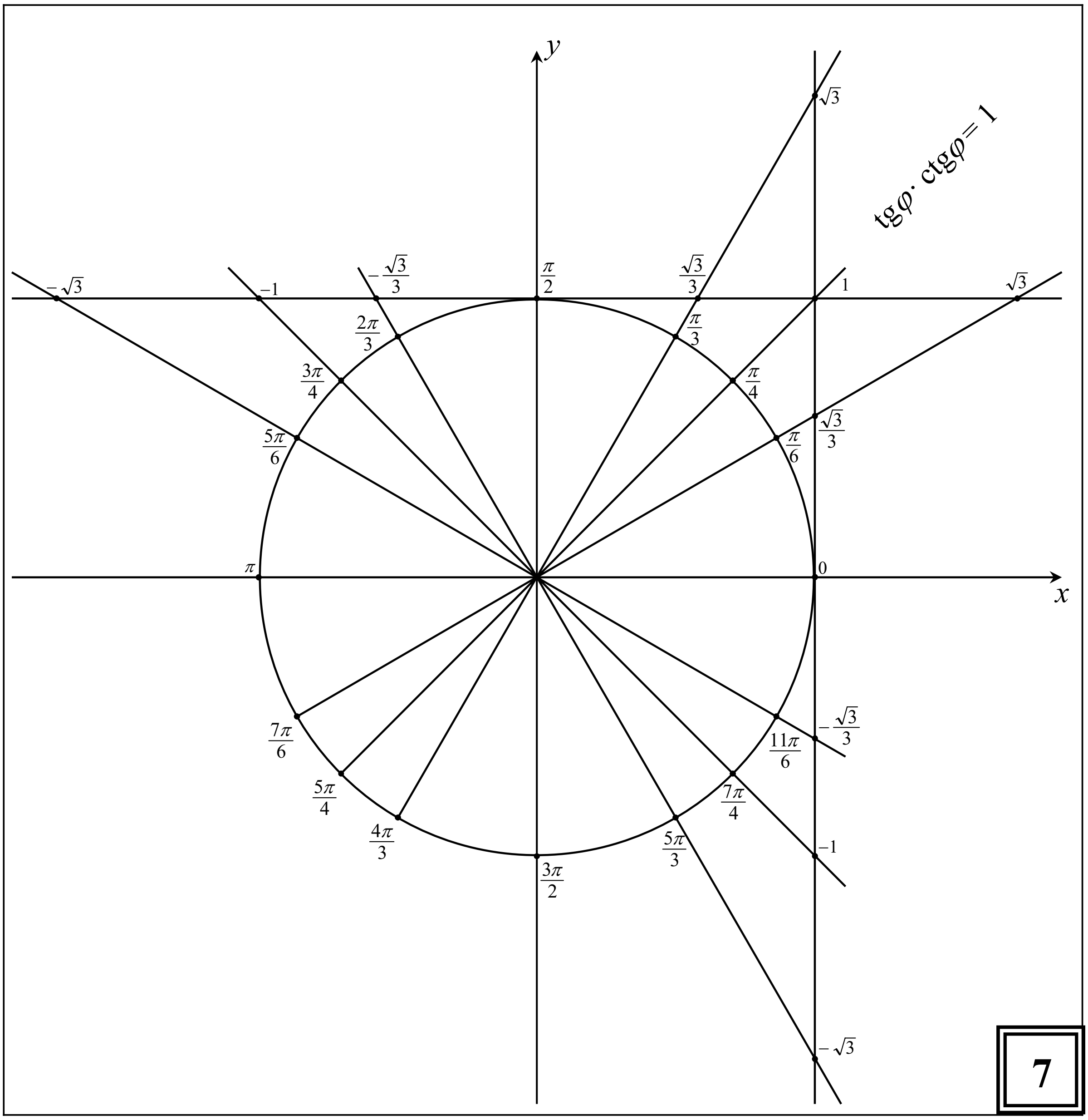




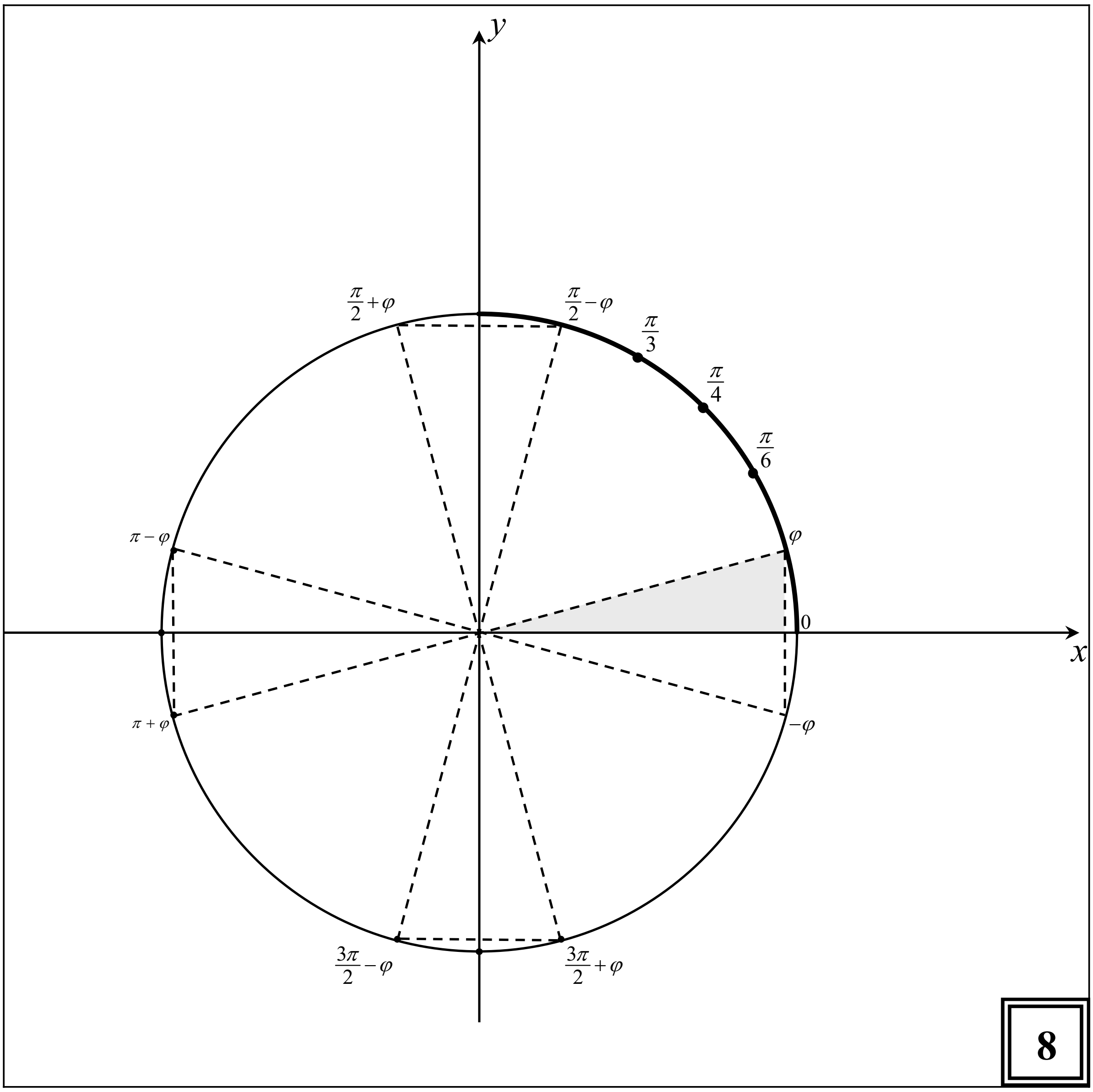
ЛАС5 нагадвае азначэнне тангенса ліку, асноўныя ўласцівасці гэтай функцыі і пра тое, чаму датычную да трыганаметрычнай акружыны ў яе пачатковым пункце называюць лініяй тангенсаў (з доказам на аснове падобнасці трохвугольнікаў). Ці здатныя вы, намаляваўшы па памяці ЛАС5, расказаць камусьці ў лагічнай паслядоўнасці яе змест? Толькі ў гэтым выпадку можна сцвярджаць, што вы адпаведнай інфармацыяй валодаеце.

Тое ж – пра катангенс ліку ў ЛАС6.

ЛАС7 нагадвае пра дакладныя значэнні тангенса і катангенса тых жа шаснаццаці пунктаў акружыны.



ЛАС8 нагадвае вывад формул прывядзення. Разглядваючы ЛАС8, вы ўспомніце пра 8 роўных прамавугольных трохвугольнікаў, у якіх мы параўноўвалі катэты, выражаныя праз сінус і косінус адпаведнага ліку акружыны. 4 з гэтых трохвугольнікаў (у тым ліку асноўны – звязаны з лікам φ на акружыне) размясціліся ўздоўж восі абсцыс, а 4 – уздоўж восі ардынат. І ад гэтага залежыць, зменіцца ці не зменіцца функцыя пры выбары роўных катэтаў, бо вертыкальныя катэты адлюстроўваюць сінусы адпаведных лікаў акружыны, а гарызантальныя – косінусы гэтых лікаў. І яшчэ – праблема выбару знакаў...



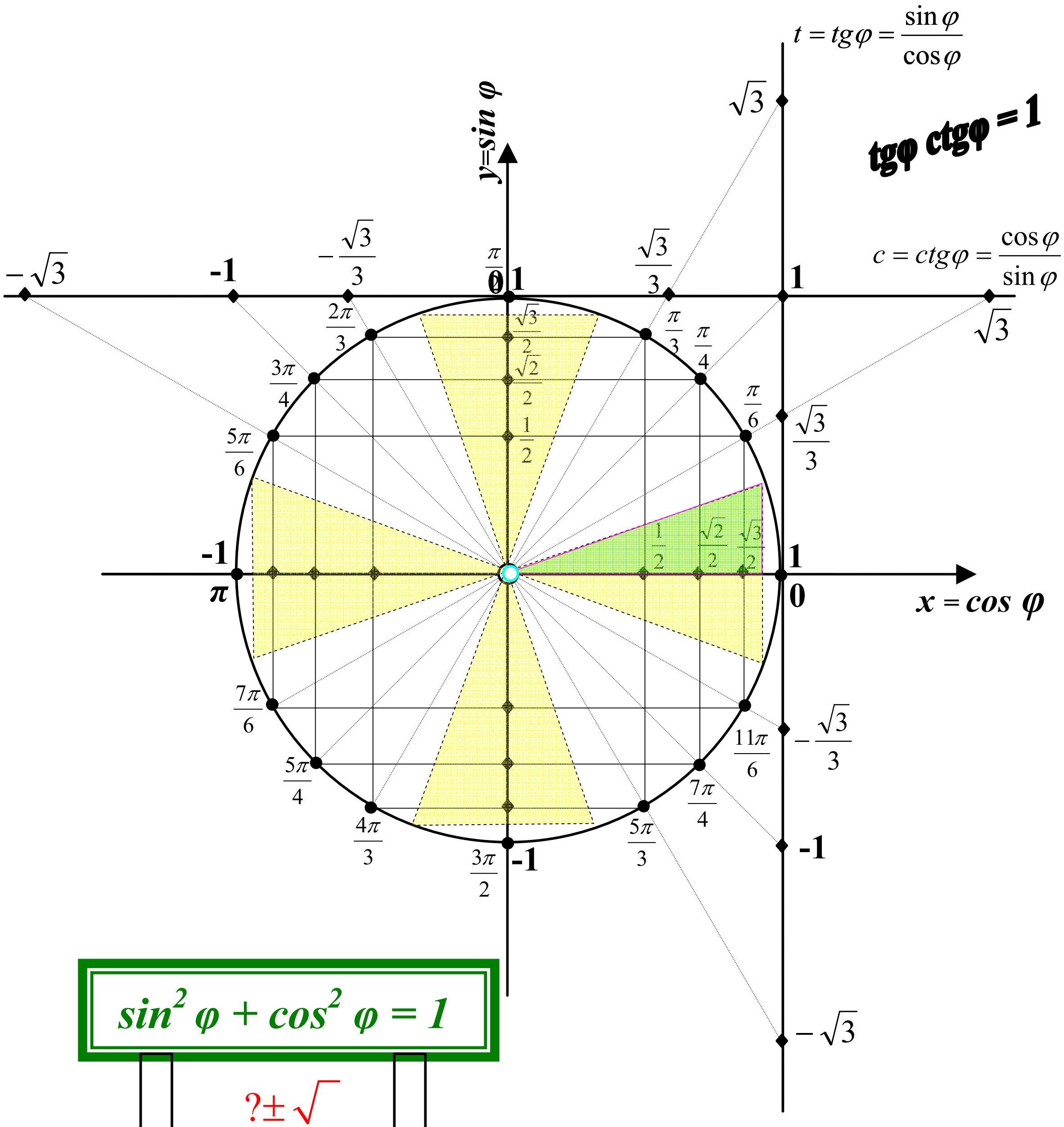
Калі вы прагледзелі гэтых 8 лістоў апорных сігналаў і ўспомнілі адлюстраваную ў іх інфармацыю, то цяпер упакуем успрынятую і асэнсаваную вамі інфармацыю ў памяці.

Уявіце сабе, што вы збіраеце інфармацыю па нейкай тэме. Вы нешта знаходзіце, выпісваеце, раздрукоўваеце, капіруеце... Колькасць аркушыкаў расце і вы заводзіце тэчку, у якую складваеце тыя аркушыкі. Тэчка папаўняецца, аркушаў становіцца ўсё болей і вы падзяляеце сабраную інфармацыю на тэматычныя часткі, для кожнай часткі заводзіце сваю тэчку – і ўсе тыя тэчкі складваеце ў вялікую тэчку. Такі натуральны прынцып, дарэчы, закладзены і ў кампутарныя праграмы. Тое ж будзем рабіць і мы, толькі са сваёй памяццю.

8 ЛАСаў змяшчаюць у нечым падобную інфармацыю і маюць нейкія агульныя дэталі, напрыклад, тую ж акружыну з восямі каардынат. Паспрабуем сабраць іх разам на адным малюнку.

КАМПАКТ 1.

Трыганаметрычныя функцыі, іх уласцівасці і формулы сувязі паміж імі. Адваротныя трыганаметрычныя функцыі.



$$\boxed{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1}$$

$?\pm\sqrt{\ }$

$$tg^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$1 + ctg^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi}$$

На папярэдняй старонцы паказаны малюнак, які змяшчае сігналы інфармацыі ўсіх васьмі ЛАСаў. Такі аб’яднаны малюнак будзем называць **кампактам**. Уважліва паразглядайце кампакт 1: ён змяшчае каля паловы інфармацыі гэтай кніжкі. Калі вы ўсё тут разумееце, спрабуйце яго запомніць. Упэўніцца, што надзейна запомнілі, можна так: паспрабуйце намаляваць гэты кампакт і каму-небудзь (настаўніку ці сябру) расказаць змест (бегла – агульны змест і дэтальна – некаторыя яго часткі).

На дзвюх далейшых старонках – кампакт 2 з інфармацыяй аб трыганаметрычных формулах (за выключэннем тых, якія ўвайшлі ў кампакт 1). ЛАСы, з якіх складаецца гэты кампакт, тут не паказаны. Але часткі кампакту і без таго выразна праглядваюцца, яны адпавядаюць падраздзелам гэтай тэмы: “формулы складання аргументаў”, “формулы падвоеных і палавінных аргументаў”, “аперацыі з трыганаметрычнымі функцыямі” і “выражэнне трыганаметрычных функцый ліку праз тангенс палавіны гэтага ліку”.

Разгледзім уважлівей кампакт 2. Нумарацыя формул тут не супадае з нумарацыяй тых жа формул у тэксце, бо парадак пераходу ад адной формулы да другой крыху іншы. Але сутнасць пераходаў тая ж. Пад нумарам 1 пададзена формула косінуса рознасці, якая з’яўляецца мамкай, бабкай і прабабкай усіх іншых формул гэтага кампакту. Яна адзіная даказваецца прыцягненнем звестак з іншых раздзелаў матэматыкі (тут – з вектарнай алгебры). Злева патлумачана, што яна атрымоўваецца скалярным множаннем двух радыус-вектараў (хто забыў, – пажадана паўтарыць вывад формулы ў тэксце). Увогуле сігналы злева ад формул нагадваюць, як гэтыя формулы атрымаліся, справа пададзены назвы формул. Напрыклад, перад формулай 2 “косінус сумы” маюцца сігналы: (1) $\beta \to -\beta$. Іх трэба разумець так, што формула 2 выводзіцца з формулы 1 заменай β на $-\beta$. Далей можна рухацца ад гэтых формул уверх, уніз і ўправа.

Зверху – формулы косінуса падвоенага аргумента і выводныя з іх формулы паніжэння ступені і формулы палавіннага аргумента.

Знізу – некаторыя формулы аперацый з трыганаметрычнымі функцыямі, выводныя складаннем ці адыманнем формул 1 і 2.

Справа – найперш формула 15 “сінус сумы”, атрыманая з формулы 2 праз формулы прывядзення. Далей – ужо з яе “высыпаюцца” іншыя формулы – “сінус рознасці” заменай β на $-\beta$, “сінус падвоенага аргумента” заменай β на α і астатнія формулы аперацый з трыганаметрычнымі функцыямі праз складанне сінуса сумы і сінуса рознасці.

Гэта стварае базу для пераходу да формул з тангенсамі і катангенсамі (яны на шэрым фоне). Тангенс палавіннага аргумента вынесены ўверх – побач з сінусам і косінусам палавіннага аргумента. Астатнія формулы з тангенсамі ніжэй. У самым нізе на шэрым фоне – формулы выражэння трыганаметрычных функцый ліку праз тангенс палавіны гэтага ліку.

Можаце параўнаць з формуламі ў тэксце і знайсці формулы, якія не ўвайшлі ў кампакт 2. Вырашайце самі, што лягчэй – запомніць тыя формулы ці пры патрэбе сумець іх вывесці.

І вось цяпер, калі вы агледзелі кампакт 2 і ўсё ў ім разумееце, паспрабуйце запомніць яго. Пракантралюйце сваю памяць узнаўленнем кампакта. Калі атрымаецца без памылак, то вы гатовы выконваць пераўтварэнні трыганаметрычных выразаў і развязваць трыганаметрычныя раўнанні і няроўнасці. Поспехаў у гэтай справе!

Цяпер натуральна перайсці да кампакту 3, які змяшчае інфармацыю аб развязванні прасцейшых трыганаметрычных раўнанняў і няроўнасцяў, да якіх зводзяцца ўсе іншыя трыганаметрычныя раўнанні і няроўнасці. Перачытайце адпаведныя раздзелы кнігі, разгледзьце кампакт: ці ўсё вы там разумееце? Калі вам здаецца, што ўсё, тады закрыйце кнігу, вазьміце аркуш паперы і ўзнавіце кампакт. Калі праца атрымаецца беспамылковай, тады перакажыце змест кампакта каму-небудзь (сябру, настаўніку, бабулі...). Калі і гэта атрымаецца прыстойна, тады неабходнай інфармацыяй вы валодаеце. Засталося навучыцца ёю карыстацца. Набывайце спрыт у развязванні задач. Для гэтага прызначаны “Задачнік”. Плёну!

КАМПАКТ 2.
Формулы трыганаметрыі.

(6),(7) $\alpha \to \frac{x}{2}$

(8) $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ (9) $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ *формулы палавіннага аргумента*

$\Uparrow$ $\Uparrow$

(6) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ (7) $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ *формулы паніжэння ступені*

$\Uparrow$ $\Uparrow$

(4) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ (5) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ *косінус падвоенага аргумента*

$\Uparrow$ $\Uparrow$

(2) $\beta \to \alpha$ (3) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\Uparrow$

(1) $\beta \to -\beta$ *скалярным множаннем двух радыус-вектараў*

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\Uparrow$

(1) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$+$ $\Downarrow$ *косінус сумы (рознасці)*

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

(11) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$

(12) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $\leftarrow$ $(\alpha \to \frac{x+y}{2}\ \ \beta \to \frac{x-y}{2})$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

Увага! – мінус!

(13) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{-2}$

(14) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ $\leftarrow$ $(\alpha \to \frac{x+y}{2}\ \ \beta \to \frac{x-y}{2})$

$tg\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ ← $\times\ 2\sin\dfrac{x}{2}$ або $2\cos\dfrac{x}{2}$, ← *далей – сінус падвоенага аргумента і формулы паніжэння ступені* → **(18)** $tg\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ → **(19)** $tg\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

(17) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ — *сінус падвоенага аргумента*

$\Uparrow$

(2) → праз формулы прывядзення

(15) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\Downarrow$

(16) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

сінус сумы (рознасці)

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

(20) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

(21) $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ ⟵ $\left(\alpha\to\dfrac{x+y}{2}\quad \beta\to\dfrac{x-y}{2}\right)$

(21) $y\to -y$ **(22)** $\sin x-\sin y=2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ *і скараціць на cosαcosβ*

(23) $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ $\beta\to\alpha\longrightarrow$ **(25)** $tg\,2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\beta\to-\beta\longrightarrow$ **(24)** $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$

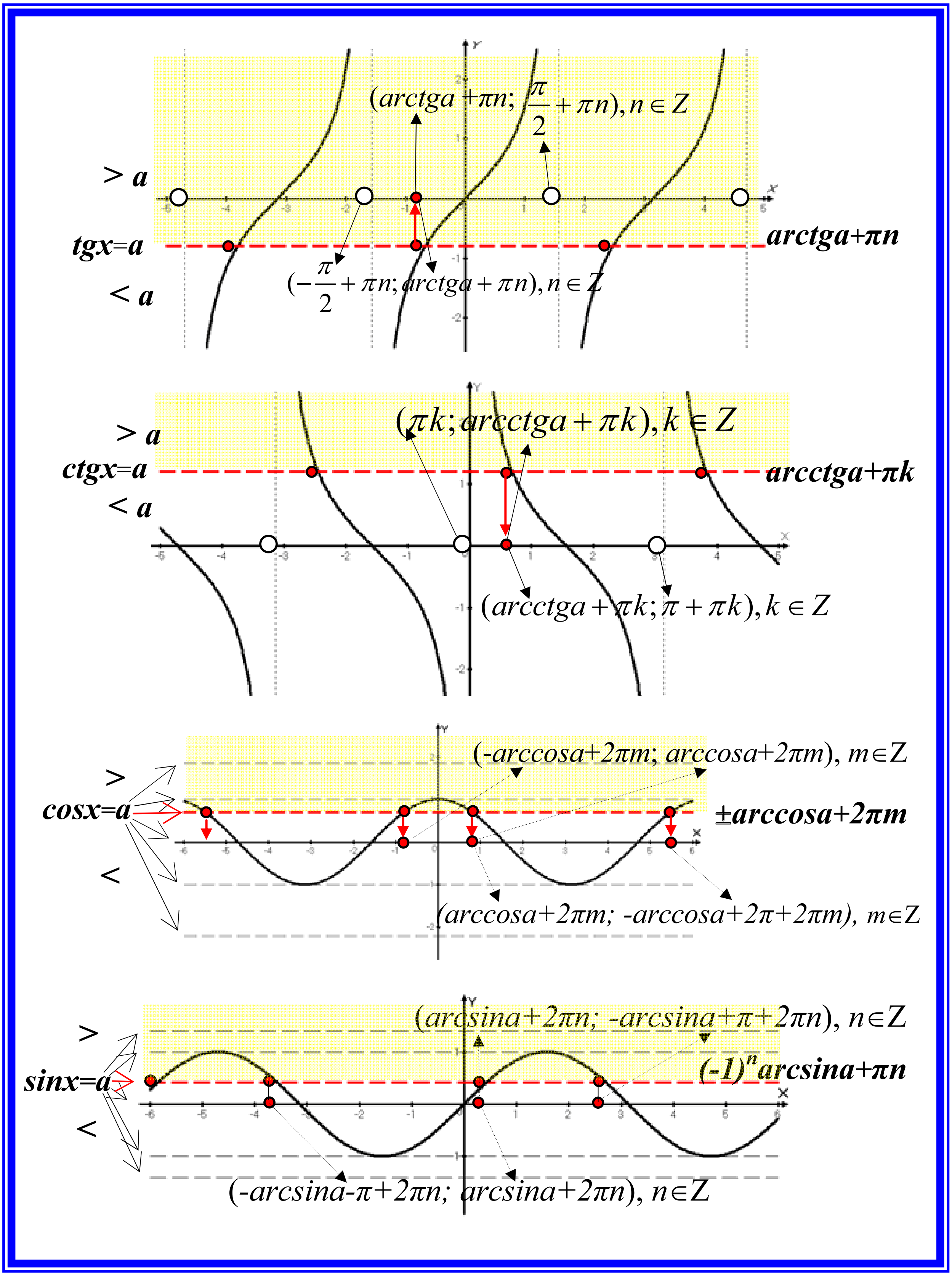
(25) $\alpha\to\dfrac{\alpha}{2}\to$ **(26)** $tg\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$ **(27)** $ctg\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$

(17) $\alpha\to\dfrac{\alpha}{2}$:1 *і скараціць на...*

(28) $\sin a=\dfrac{2tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$ **(29)** $\cos a=\dfrac{\sin a}{tg a}=\dfrac{2tg\frac{a}{2}}{1+tg^2\frac{a}{2}}$

КАМПАКТ 3.

Трыганаметрычныя раўнанні і няроўнасці



Задачнік

I. Развяжыце раўнанні аднаго з слупкоў:

1) $sin\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2) $cos\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3) $tg\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4) $sin\,\boldsymbol{x} = -\sqrt{3}$
5) $cos\,\boldsymbol{x} = -\sqrt{3}$
6) $tg\,\boldsymbol{x} = -\sqrt{3}$
7) $sin\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
8) $cos\,\boldsymbol{x} = -3:\sqrt{3}$
9) $tg\,\boldsymbol{x} = -1$
10) $sin\,\boldsymbol{x} = -1{,}3$
11) $cos\,\boldsymbol{x} = -1{,}3$
12) $tg\,\boldsymbol{x} = -1{,}3$
13) $sin\,\boldsymbol{x} = 0{,}13$
14) $cos\,\boldsymbol{x} = 0{,}13$
15) $tg\,\boldsymbol{x} = 0{,}13$
16) $cos\,\boldsymbol{x} = 0$
17) $sin\,\boldsymbol{x} = -0{,}25$
18) $tg\,\boldsymbol{x} = 2008$
19) $sin\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\pi}{2}$
20) $cos\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\pi}{3}$
21) $tg\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\pi}{2}$
22) $sin\,\boldsymbol{x} = 1$
23) $cos\,\boldsymbol{x} = -0{,}5$
24) $ctg\,\boldsymbol{x} = \dfrac{2-\sqrt{37}}{4}$
25) $cos\,\boldsymbol{x} = \dfrac{2-\sqrt{37}}{4}$

1) $sin\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2) $cos\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3) $tg\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4) $sin\,\boldsymbol{x} = -1$
5) $cos\,\boldsymbol{x} = -1$
6) $ctg\,\boldsymbol{x} = -1$
7) $sin\,\boldsymbol{x} = -1{,}8$
8) $cos\,\boldsymbol{x} = -1{,}8$
9) $tg\,\boldsymbol{x} = -1{,}8$
10) $sin\,\boldsymbol{x} = 0{,}18$
11) $cos\,\boldsymbol{x} = -0{,}18$
12) $tg\,\boldsymbol{x} = 0{,}18$
13) $cos\,\boldsymbol{x} = 6-2\pi$
14) $sin\,\boldsymbol{x} = -0{,}5$
15) $sin\,\boldsymbol{x} = -\sqrt{1{,}00034}$
16) $cos\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
17) $tg\,\boldsymbol{x} = -\sqrt{1{,}00012}$
18) $tg\,\boldsymbol{x} = -2005$
19) $sin\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{3\pi}{4}$
20) $cos\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{\pi}{2}$
21) $tg\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{3\pi}{4}$
22) $cos\,\boldsymbol{x} = 1$
23) $sin\,\boldsymbol{x} = -0{,}5$
24) $ctg\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{52}-6}{2}$
25) $cos\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{52}-6}{2}$

1) $sin\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2) $cos\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3) $tg\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4) $sin\,\boldsymbol{x} = \sqrt{3}$
5) $cos\,\boldsymbol{x} = \sqrt{3}$
6) $tg\,\boldsymbol{x} = \sqrt{3}$
7) $sin\,\boldsymbol{x} = 2-\pi$
8) $cos\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
9) $tg\,\boldsymbol{x} = 1$
10) $sin\,\boldsymbol{x} = -1{,}23$
11) $cos\,\boldsymbol{x} = -1{,}23$
12) $tg\,\boldsymbol{x} = -1{,}23$
13) $sin\,\boldsymbol{x} = 0{,}123$
14) $cos\,\boldsymbol{x} = -0{,}123$
15) $tg\,\boldsymbol{x} = 0{,}123$
16) $sin\,\boldsymbol{x} = 0$
17) $sin\,\boldsymbol{x} = 0{,}5$
18) $tg\,\boldsymbol{x} = 220055$
19) $sin\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{\pi}{2}$
20) $cos\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{3\pi}{4}$
21) $tg\,\boldsymbol{x} = -\dfrac{\pi}{2}$
22) $sin\,\boldsymbol{x} = \dfrac{\sqrt{4}}{2}$
23) $cos\,\boldsymbol{x} = 0{,}5$
24) $ctg\,\boldsymbol{x} = \dfrac{5-\sqrt{70}}{3}$
25) $sin\,\boldsymbol{x} = \dfrac{5-\sqrt{70}}{3}$

26) $\sin 3\boldsymbol{x} = 0{,}7$	26) $\sin 3\boldsymbol{x} = 0{,}4$	26) $\sin 3\boldsymbol{x} = 0{,}99$
27) $\cos 3\boldsymbol{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	27) $\cos 3\boldsymbol{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	27) $\sin 3\boldsymbol{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
28) $tg\,(\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	28) $tg\,(\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	28) $tg\,(\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
29) $tg\,(6\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	29) $tg\,(6\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	29) $tg\,(6\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
30) $\cos\,(\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	30) $\sin\,(\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	30) $\cos\,(\boldsymbol{x} - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
31) $10\cos 4\boldsymbol{x} = -5\sqrt{3}$	31) $4\sin 4\boldsymbol{x} = -2\sqrt{3}$	31) $6\sin 4\boldsymbol{x} = 3\sqrt{3}$
32) $\sqrt{3}\; tg\,(\boldsymbol{x} + 2) = 3$	32) $\sqrt{3}\; tg\,(\boldsymbol{x} + 3) = 3$	32) $\sqrt{3}\; tg\,(\boldsymbol{x} + 5) = 3$

II. Развяжыце раўнанні, скарыстоўваючы прыём “замена зменных” і формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ і $tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$ (заданняў тут больш, чым вам трэба, каб навучыцца развязваць такія раўнанні, таму развязваць усе не трэба; цотныя заданні тут проста дубліруюць адпаведныя няцотныя, таму развязваць заданне з цотным нумарам трэба толькі тады, калі папярэдняе заданне з няцотным нумарам не паддалося ці калі былі зроблены істотныя памылкі; кроп-кавыя лініі падзяляюць гэтую сістэму заданняў на асобныя часткі, – калі вы лічыце, што прыём просты і доўга адпрацоўваць яго не трэба, то развяжыце толькі па 5 апошніх раўнанняў з кожнай часткі, – калі гэта атрымаецца беспамылкова, то й дастаткова, інакш прыдзецца трэніравацца яшчэ):

1) $6\sin^2\boldsymbol{x} + \sin\boldsymbol{x} - 2 = 0$;

2) $6\cos^2\boldsymbol{x} + \cos\boldsymbol{x} - 2 = 0$;

3) $10\cos^2 3\boldsymbol{x} - 5\cos 3\boldsymbol{x} - 3 = 0$;

4) $10\sin^2 6\boldsymbol{x} + 5\sin 6\boldsymbol{x} - 3 = 0$;

5) $2\cos^2 12\boldsymbol{x} - 5\sin 12\boldsymbol{x} - 4 = 0$;

6) $2\sin^2 8\boldsymbol{x} + 5\cos 8\boldsymbol{x} - 4 = 0$;

7) $25\,tg^2\boldsymbol{x} + 10\,tg\,\boldsymbol{x} + 1 = 0$;

8) $16\,ctg^2\boldsymbol{x} - 8\,ctg\,\boldsymbol{x} + 1 = 0$;

9) $3\,ctg^2 2\boldsymbol{x} + ctg\,2\boldsymbol{x} - 1 = 0$;

10) $7\,tg^2 10\boldsymbol{x} - 2\,tg\,10\boldsymbol{x} - 1 = 0$;

11) $6\,tg\,\frac{2}{3}\boldsymbol{x} + 2\,ctg\,\frac{2}{3}\boldsymbol{x} = 7$;

12) $2\,tg\,\frac{3}{2}\boldsymbol{x} + 6\,ctg\,\frac{3}{2}\boldsymbol{x} = 7$;

13) $8 + 7\,cos\,\frac{12}{7}\boldsymbol{x} - 3\,sin^2\,\frac{12}{7}\boldsymbol{x} = 0$;

14) $8 + 7\,sin\,\frac{11}{8}\boldsymbol{x} = 3\,cos^2\,\frac{11}{8}\boldsymbol{x}$;

15) $9\,sin\,\frac{x}{5} + 4\,cos^2\,\frac{x}{5} = 10$;

16) $4\,sin^2\,\frac{x}{9} + 9\,cos\,\frac{x}{9} = 10$;

17) $9\,tg\,\frac{x}{6}\cdot ctg\,\frac{x}{6} = 4\,tg\,\frac{x}{3} + 6\,ctg\,\frac{x}{3}$;

18) $4\,ctg\,\frac{x}{4} + 6\,tg\,\frac{x}{4} = 9\,ctg\,\frac{x}{8}\;tg\frac{x}{8}$;

19) $2\,sin^2\,2\,\pi\,\boldsymbol{x} + 2\sqrt{2}\,\cos\,2\,\pi\,\boldsymbol{x} = 3$;

20) $2\,cos^2\,\pi\,\boldsymbol{x} + 2\sqrt{2}\,sin\,\pi\,\boldsymbol{x} = 3$;

……………………………………………………

21) $0{,}5\,sin^2\boldsymbol{x} - 2sin\,\boldsymbol{x} + 1{,}5 = 0$;

22) $cos^2\boldsymbol{x} - 4cos\,\boldsymbol{x} + 3 = 0$;

23) $ctg^2\boldsymbol{x} - 4ctg\,\boldsymbol{x} + 3 = 0$;

24) $tg^2\boldsymbol{x} - 4tg\,\boldsymbol{x} + 3 = 0$;

25) $cos^2\,4\boldsymbol{x} + 4sin\,4\boldsymbol{x} - 4 = 0$;

26) $sin^2\,4\boldsymbol{x} + 4\cos\,4\boldsymbol{x} - 4 = 0$;

27) $tg\,2\boldsymbol{x} + 3ctg\,2\boldsymbol{x} - 4 = 0$;

28) $ctg\,5\boldsymbol{x} + 3tg\,5\boldsymbol{x} - 4 = 0$;

29) $cos^4\boldsymbol{x} - 4cos^2\,\boldsymbol{x} + 3 = 0$;

30) $0{,}5\,sin^4\boldsymbol{x} - 2sin^2\,\boldsymbol{x} + 1{,}5 = 0$;

31) $ctg^2\,5\boldsymbol{x} + 3tg^2\,5\boldsymbol{x} - 4 = 0$;

32) $tg^2\,2\boldsymbol{x} + 3ctg^2\,2\boldsymbol{x} - 4 = 0$;

33) $sin^2\,(5\boldsymbol{x} - 8) - 4\cos\,(5\boldsymbol{x} - 8) - 4 = 0$;

34) $cos^2\,(3\boldsymbol{x} + 9) - 4sin\,(3\boldsymbol{x} + 9) - 4 = 0$;

35) $ctg\,(\frac{1}{3}\boldsymbol{x} + \frac{2\pi}{3}) - 3\,tg\,(\frac{1}{3}\boldsymbol{x} + \frac{2\pi}{3}) - 4 = 0$;

36) $tg\,(\frac{x}{3} - \frac{2\pi}{3}) - 3ctg\,(\frac{x}{3} - \frac{2\pi}{3}) - 4 = 0$;

37) $ctg^2\,(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{8}) - 3tg^2\,(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{8}) - 2 = 0$;

38) $ctg^2\,(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{8}) - 3tg^2\,(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{8}) + 2 = 0$;

39) $-2sin^2(0{,}2\boldsymbol{x} - 40^o) - 2sin(0{,}2 - 40^o) - 3cos^2(0{,}2\boldsymbol{x} - 40^o) = 0$;

40) $-2cos^2(0{,}2\boldsymbol{x} + 40^o) - 2cos(0{,}2 + 40^o) - 3sin^2(0{,}2\boldsymbol{x} + 40^o) = 0$;

……………………………………………………

41) $8\cos^2 x + 10\cos x + 3 = 0$;

42) $8\sin^2 x - 10\sin x + 3 = 0$;

43) $8\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$;

44) $8\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$;

45) $-8\cos^2 0{,}5x + 10\sin 0{,}5x + 11 = 0$;

46) $-8\sin^2 \frac{x}{3} + 10\cos \frac{x}{3} + 11 = 0$;

47) $-4\,tg^2 x - 5\,tg\, x - 1{,}5 = 0$;

48) $4\,ctg^2 x + 5\,ctg\, x + 1{,}5 = 0$;

49) $80\,ctg \frac{x}{3} + 30\,tg \frac{x}{3} + 100 = 0$;

50) $-40\,ctg\, 2x - 15\,tg\, 2x - 50 = 0$;

51) $8\,ctg^4 x - 2\,ctg^2 x - 3 = 0$;

52) $4\,tg^4 x - tg^2 x - 1{,}5 = 0$;

53) $4\,tg^4 x - tg^2 x - 1{,}5\,tg\, x\, ctg\, x = 0$;

54) $8\,ctg^4 x - 2\,ctg^2 x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$;

55) $3\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sin 3x - 8\sin^2 3x = 0$;

56) $6\,tg\, x\, ctg\, x + 4\cos 6x - 16\cos^2 6x = 0$;

57) $8\sin^4 x - 10\sin^2 x + 3 = 0$;

58) $8\cos^4 x + 10\cos^2 x + 3 = 0$;

59) $8\cos^4 x - 2\cos^2 x - 3 = 0$;

60) $8\sin^4 x - 2\sin^2 x - 3 = 0$;

61) $8\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$;

62) $8\sin^2 x + 10\sin x + 3 = 0$;

63) $8\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$;

64) $8\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$;

65) $-8\cos^2 0{,}5x - 10\sin 0{,}5x + 11 = 0$;

66) $-8\sin^2 \frac{x}{3} - 10\cos \frac{x}{3} + 11 = 0$;

67) $-4\,tg^2 x + 5\,tg\, x - 1{,}5 = 0$;

68) $4\,ctg^2 x - 5\,ctg\, x + 1{,}5 = 0$;

69) $80\,ctg \frac{x}{3} - 30\,tg \frac{x}{3} + 100 = 0$;

70) $-40\,ctg\, 2x + 15\,tg\, 2x - 50 = 0$;

71) $8\,ctg^4 x + 2\,ctg^2 x - 3 = 0$;

72) $4\,tg^4 x + tg^2 x - 1{,}5 = 0$;

73) $4\,tg^4 x + tg^2 x - 1{,}5\,tg\, x\, ctg\, x = 0$;

74) $8\,ctg^4 x + 2\,ctg^2 x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$;

75) $3\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sin 3x - 8\sin^2 3x = 0$;

76) $6\,tg\, x\, ctg\, x - 4\cos 6x - 16\cos^2 6x = 0$;

77) $8\ sin^4 \frac{x}{4} + 10\ sin^2 \frac{x}{4} + 3 = 0;$

78) $8\ cos^4 \frac{x}{4} - 10\ cos^2 \frac{x}{4} + 3 = 0;$

79) $8\ cos^4\ 10\boldsymbol{x} + 2\ cos^2\ 10\boldsymbol{x} - 3 = 0;$

80) $8\ sin^4\ 10\boldsymbol{x} + 2\ sin^2\ 10\boldsymbol{x} - 3 = 0;$

....

81) $3\ sin^2\ \boldsymbol{x} + 10\ sin\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

82) $3\ cos^2\ \boldsymbol{x} + 10\ cos\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

83) $3\ sin^2\ \boldsymbol{x} - 10\ cos\ \boldsymbol{x} - 6 = 0;$

84) $3\ cos^2\ \boldsymbol{x} - 10\ sin\ \boldsymbol{x} - 6 = 0;$

85) $3\ ctg^2\ 3\boldsymbol{x} + 10\ ctg\ 3\boldsymbol{x} + 3 = 0;$

86) $3\ tg^2\ 2\boldsymbol{x} + 10\ tg\ 2\boldsymbol{x} + 3 = 0;$

87) $3\ ctg\ \boldsymbol{x} + 3\ tg\ \boldsymbol{x} + 10 = 0;$

88) $10 + 3\ tg\ \boldsymbol{x} + 3\ ctg\ \boldsymbol{x} = 0;$

89) $3\ cos^4\ \boldsymbol{x} + 10\ cos^2\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

90) $3\ sin^4\ \boldsymbol{x} + 10\ sin^2\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

91) $3\ tg^4\ \boldsymbol{x} + 10\ tg^2\ \boldsymbol{x} + 3 = 0$

92) $3\ ctg^4\ \boldsymbol{x} + 10\ ctg^2\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

93) $3\ cos^2\ 10\boldsymbol{x} - 10\ cos\ 10\boldsymbol{x} + 3 = 0;$

94) $3\ sin^2\ 10\boldsymbol{x} - 10\ sin\ 10\boldsymbol{x} + 3 = 0;$

95) $3\ tg^2\ (2\boldsymbol{x}+1) - 10\ tg\ (2\boldsymbol{x}+1) + 3 = 0;$

96) $3\ ctg^2\ (2\boldsymbol{x}+1) - 10\ ctg\ (2\boldsymbol{x}+1) + 3 = 0;$

97) $-3\ cos^2\ \boldsymbol{x} - 10\ sin\ \boldsymbol{x} + 6 = 0;$

98) $-3\ sin^2\ \boldsymbol{x} - 10\ cos\ \boldsymbol{x} + 6 = 0;$

99) $10\ tg\ \boldsymbol{x} \cdot ctg\ \boldsymbol{x} - 3\ tg\ \boldsymbol{x} - 3\ ctg\ \boldsymbol{x} = 0;$

100) $20\ ctg\ \boldsymbol{x} \cdot tg\ \boldsymbol{x} - 6\ ctg\ \boldsymbol{x} - 6\ tg\ \boldsymbol{x} = 0;$

101) $3\ sin^4\ \boldsymbol{x} - 10\ sin^2\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

102) $3\ cos^4\ \boldsymbol{x} - 10\ cos^2\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

103) $3\ ctg^4\ \boldsymbol{x} - 10\ ctg^2\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

104) $3\ tg^4\ \boldsymbol{x} - 10\ tg^2\ \boldsymbol{x} + 3 = 0;$

105) $3\ sin^2\ 7\boldsymbol{x} + 8\ sin\ 7\boldsymbol{x} - 3 = 0;$

106) $3\ cos^2\ 8\boldsymbol{x} + 8\ cos\ 8\boldsymbol{x} - 3 = 0;$

107) $3\ sin^2\ 8\boldsymbol{x} - 8\ cos\ 8\boldsymbol{x} = 0;$

108) $3\ cos^2\ 7\boldsymbol{x} - 8\ sin\ 7\boldsymbol{x} = 0;$

109) $3\ ctg^2\ 2\boldsymbol{x} + 8\ ctg\ 2\boldsymbol{x} - 3 = 0;$

110) $3\ tg^2\ 3\boldsymbol{x} + 8\ tg\ 3\boldsymbol{x} - 3 = 0;$

111) $3\ tg\ 3\boldsymbol{x} + 8\ tg\ 73\boldsymbol{x} \cdot ctg\ 73\boldsymbol{x} - 3\ ctg\ 3\boldsymbol{x} = 0;$

112) $3\ tg\ 2\boldsymbol{x} + 8\ tg\ 94\boldsymbol{x} \cdot ctg\ 94\boldsymbol{x} - 3\ ctg\ 2\boldsymbol{x} = 0;$

113) $3\ cos^4\ 6\boldsymbol{x} + 8\ cos^2\ 6\boldsymbol{x} - 3 = 0;$

114) $3\,sin^4 4\boldsymbol{x} + 8\,sin^2 4\boldsymbol{x} - 3 = 0$;

115) $3\,tg^4 \frac{x}{3} + 8\,tg^2 \frac{x}{3} - 3 = 0$;

116) $3\,ctg^4 \frac{x}{3} + 8\,ctg^2 \frac{x}{3} - 3 = 0$;

117) $3\,sin^2 \frac{x}{6} - 8\,sin \frac{x}{6} - 3 = 0$;

118) $3\,cos^2 \frac{x}{6} - 8\,cos \frac{x}{6} - 3 = 0$;

119) $ctg^4 \frac{x}{6} - 8\,ctg^2 \frac{x}{6} - 3 = 0$;

120) $3\,tg^4 \frac{x}{6} - 8\,tg^2 \frac{x}{6} - 3 = 0$;

…………………………………………..……………

121) $2\,sin^2 \boldsymbol{x} + 12\,sin\,\boldsymbol{x} + 10{,}5 = 0$;

122) $2\,cos^2 \boldsymbol{x} + 12\,cos\,\boldsymbol{x} + 10{,}5 = 0$;

123) $2\,sin^2 \boldsymbol{x} - 12\,sin\,\boldsymbol{x} - 12{,}5 = 0$;

124) $2\,cos^2 \boldsymbol{x} - 12\,sin\,\boldsymbol{x} - 12{,}5 = 0$;

125) $2\,ctg^2 6\boldsymbol{x} + 12\,ctg\,6\boldsymbol{x} + 10{,}5 = 0$;

126) $2\,tg^2 6\boldsymbol{x} + 12\,tg\,6\boldsymbol{x} + 10{,}5 = 0$;

127) $2\,cos^4 11\boldsymbol{x} + 12\,cos^2 11\boldsymbol{x} + 10{,}5 = 0$;

128) $2\,sin^4 13\boldsymbol{x} + 12\,sin^2 13\boldsymbol{x} + 10{,}5 = 0$;

129) $32\,cos^2 2\boldsymbol{x} + 60\,cos\,2\boldsymbol{x} + 27 = 0$;

130) $32\,sin^2 2\boldsymbol{x} + 60\,sin\,2\boldsymbol{x} + 27 = 0$;

131) $32\,sin^4 \frac{x}{2} + 60\,sin^2 \frac{x}{2} + 27 = 0$;

132) $32\,cos^4 \frac{x}{2} + 60\,cos^2 \frac{x}{2} + 27 = 0$;

133) $32\,sin^2 \frac{x}{2} + 12\,sin \frac{x}{2} - 27 = 0$;

134) $32\,cos^2 \frac{x}{2} + 12\,cos \frac{x}{2} - 27 = 0$;

135) $32\,cos^4 \boldsymbol{x} + 12\,cos^2 \boldsymbol{x} - 27 = 0$;

136) $32\,sin^4 \boldsymbol{x} + 12\,sin^2 \boldsymbol{x} - 27 = 0$;

137) $32\,cos^2 \boldsymbol{x} - 12\,cos\,\boldsymbol{x} - 27 = 0$;

138) $32\,sin^2 \boldsymbol{x} - 12\,sin\,\boldsymbol{x} - 27 = 0$;

139) $32\,sin^4 \boldsymbol{x} - 12\,sin^2 \boldsymbol{x} - 27 = 0$;

140) $32\,cos^4 \boldsymbol{x} - 12\,cos^2 \boldsymbol{x} - 27 = 0$;

141) $2{,}5\, sin^2 \frac{2x}{3} + \sqrt{3}\, sin \frac{2x}{3} = 1{,}5\, cos^2 \frac{2x}{3}$;

142) $2{,}5\, sin^2 \frac{2x}{3} + \sqrt{3}\, cos \frac{2x}{3} = 1{,}5\, cos^2 \frac{2x}{3}$.

143) $sin^4 x + cos^4 x = cos^2 2x + 0{,}25$;

144) $sin^4 x + cos^4 x = sin\, 2x - 0{,}5$;

III. Развяжыце раўнанні (тут ужо будзеце карыстацца ўсім наборам вядомых вам формул і прыёмаў). Да гэтых 40 заданняў напрыканцы апошняга нумара маецца дапаможнік з парадамі, падказкамі, адказамі і раздумінамі.

1) $5\, sin \frac{x}{2} + cos\, x - 3 = 0$;

2) $sin \frac{x}{4} + cos \frac{x}{2} = 1$;

3) $3\, cos\, 24x - 3\, cos\, (12x - \frac{\pi}{2}) = 2$;

4) $\frac{1 + tgx}{1 + ctgx} = 2\, sin\, x$;

5) $1 - sin\, 5x = (cos \frac{3x}{2} - sin \frac{3x}{2})^2$;

6) $2 + cos^2 3x = 2{,}5\, cos\, (6x - \frac{\pi}{2})$;

7) $4\, sin^2 (2x - \frac{3\pi}{2}) + 10\, sin^2 (x + \frac{3\pi}{2}) = 1$;

8) $8cos\, 4x - 5cos^2 (7\pi + 2x) - sin\, 4x = 0$;

9) $8sin \frac{\pi - x}{2} + cos \frac{\pi + x}{2} = 5sin^2 \frac{6\pi - x}{4}$;

10) $3 = 4sin \frac{x + 9\pi}{6} + 6sin^2 \frac{6\pi + x}{12}$;

11) $ctg\, 2x - ctg\, 4x = 2$;

12) $cos\, x\, cos\, 3x = cos\, 5x\, cos\, 7x$;

13) $cos\, 3x\, sin\, 7x = cos\, 2x\, sin\, 8x$;

13г) $sin\, x = 0$ або $cos\, 5x = 0$. *Адказ*: πn; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$; $k, n \in Z$.

14) $sin^4 x + cos^2 2x = 2$;

15) $2sin\, (x + \frac{9\pi}{2}) = cos\, (3x - 8\pi)$;

16) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x = \frac{1}{32}\cos\left(20x - \frac{5\pi}{2}\right)$;

17) $\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x$;

18) $\sin x = 2\sin^3 x - \cos 2x$;

19) $1 - \cos x - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x = 0$;

20) $\cos 5x = \cos (5 + x)$;

21) $2\sin 5x + \sqrt{3}\sin 3x = \cos 3x$;

22) $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 3x}$;

23) $\sin^3 x + \sin x + \cos x + \cos^3 x = 0$;

24) $\cos^6 x - \sin^6 x = 2\cos^2 2x$;

25) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$;

26) $(\cos 5x + \cos 7x)^2 + (\sin x + \sin 7x)^2 = 0$;

27) $\cos 2x = \cos^3 x + \sin^3 x$;

28) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 0{,}5$;

29) $1 - 2\sin 2x - \sin x + \cos x = 0$;

30) $\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x = 2\sin 2x$;

31) $(2\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x)\sqrt{4\pi^2 - x^2} = 0$;

32) $\sqrt{6(1 - tg^2 x)} = 4\sin x$;

33) $\sqrt{-15\cos x} + 2\sin x = 0$;

34) $\sqrt{\sin(x+3) - \sin 3\cos x} = \sqrt{\cos x}$;

35) $\sqrt{9 - x^2}\,(5 - 3\sin 2x + 7\sin x - 7\cos x) = 0$;

36) $\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2 \frac{5x}{2} = 1$;

37) $\frac{1}{\sin x} - \cos x = ctg x - 1$;

38) $\frac{\sin 6x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos 6x}{\cos x - \sin x}$;

39) $(x - 2)^2 |\cos x| = \cos x$;

40) $tg\, 3t + tg\, t = 2\sin 4t$;

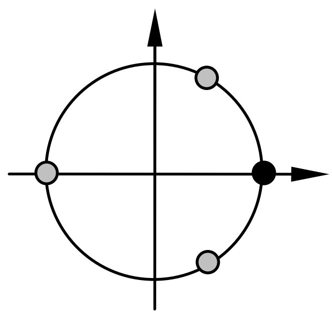
Дапаможнік да раўнанняў 1-40

1. Калі вы заўважылі, што $x > \frac{x}{2}$ у 2 разы, то здагадаецеся прымяніць адну з формул падвоенага аргумента. Далей $\to$ 81.

2. $\frac{x}{2}$ удвая большы за $\frac{x}{4}$, таму скарыстаем формулу косінуса падвоенага аргумента: $cos\,\frac{x}{2} = 1 - 2sin^2\,\frac{x}{4}$. Атрымаем раўнанне $sin\,\frac{x}{4} - 2sin^2\,\frac{x}{4} = 0$, якое распадаецца на 2 раўнанні: $sin\,\frac{x}{4} = 0$ або $sin\,\frac{x}{4} = 0{,}5$. *Адказ*: $4\pi n$; $(-1)^k\,\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$; $n, k \in Z$.

3. Спачатку скарыстаем адну з формул прывядзення, каб спрасціць другі косінус: $cos\,(12x - \frac{\pi}{2}) = cos\,(\frac{\pi}{2} - 12x) = sin\,12x$. Далейшае відавочна: пасля замены $cos\,24x$ на $1 - 2sin^2\,12x$ атрымаем квадратнае раўнанне $6\,sin^2\,12x + 3\,sin\,12x - 1 = 0$. Працяг $\rightarrow$ 83.

4. Замяніўшы $tg\,x$ на $\frac{sinx}{cosx}$, а $ctg\,x$ на $\frac{cosx}{sinx}$, атрымаем такое раўнанне: $\frac{sinx}{cosx} = 2\,sin\,x$, з якога $sin\,x = 0$ або $cos\,x = 0{,}5$. Адказ на малюнку. Яго можа запісаць так: πn; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $n, k \in Z$. А можна заўважыць, што тры шэрыя пункты акружыны раўнамерна размяшчаюцца на ёй праз 120°, і запісаць адказ так: $2\pi m$; $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi c}{3}$; $m, c \in Z$ (першая частка адказу для чорнага пункта, другая – для трох шэрых). Праўда, тут другі варыянт запісу адказу ніколькі не лепшы за першы.



5. Спачатку раскрыем дужкі. Працяг $\rightarrow$ 85.

6. Для цотнага косінуса ўсё адно, што $6x - \frac{\pi}{2}$, што $\frac{\pi}{2} - 6x$, таму праз адну з формул прывядзення раўнанне пераўтворыцца ў такое: $2 + cos^2\,3x = 2{,}5\,sin\,6x$. Далей напрошваецца сінус падвоенага аргумента. $\rightarrow$ 86.

7. Відавочна, пачаць трэба з формул прывядзення. Для сінуса не ўсё адно: $2x - \frac{3\pi}{2}$ ці $\frac{3\pi}{2} - 2x$, але ж там – квадрат, таму пра знак можна не думаць: $4\,cos^2\,2x + 10\,cos^2\,x = 1$. $\rightarrow$ 87.

8. Ад выразу ў дужках аднімем тры перыяды косінуса, застанецца $\pi + 2x$, і скарыстаем адпаведную формулу прывядзення, не думаючы пра знак, бо там – квадрат. $\rightarrow$ 88.

9. Відавочна, што пачаць пераўтварэнні трэба з формул прывядзення: $sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}) = cos\frac{x}{2}$; $cos(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}) = -sin\frac{x}{2}$; $sin^2\frac{6\pi - x}{4} = sin^2(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{4}) = cos^2\frac{x}{4}$. Прыгледзімся да атрыманых аргументаў: $\frac{x}{2}=2\cdot\frac{x}{4}$. І далей магчымыя 2 шляхі – пераходзіць да аргумента $\frac{x}{2}$ з дапамогай формул паніжэння ступені ($\rightarrow$ 89) або пераходзіць да аргумента $\frac{x}{4}$ праз формулы падвоеных аргументаў ($\rightarrow$ 129). Выбірайце свой шлях.

10. $3 = 4sin(\frac{x}{6}+\frac{3\pi}{2}) + 6sin^2(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{12})$ – у такой форме запісу лепш бачна, якія формулы прывядзення прымяняць. $\rightarrow$ 90.

11. Выгодней перайсці да тангенсаў, з імі формул болей.

$\frac{1}{tg2x}-\frac{1-tg^2 2x}{2tg2x} = 2 \Leftrightarrow 1+ tg^2\, 2x = 4tg\, 2x$ і $tg\, 2x \neq 0 \Leftrightarrow tg\, 2x = 2\pm\sqrt{3}$. $\rightarrow$ 91.

12. Маецца формула, якая дазваляе множанне косінусаў. $\rightarrow$ 92.

13. Нешта падобнае на папярэдняе заданне. Шукаем формулу для множання косінуса на сінус. $\rightarrow$ 93.

14. Варыянтаў пачатку шмат: можна паспрабаваць скарыстаць формулу косінуса падвоенага аргумента ($\rightarrow$ 94), або панізіць ступень сінуса ($\rightarrow$ 134), або яшчэ нешта ($\rightarrow$ 54).

15. Пасля выдалення лішніх перыядаў і скарыстання адной з формул прывядзення атрымаем... $\rightarrow$ 95.

16. Заўважаем здабытак косінусаў, аргументы якіх утвараюць геаметрычную прагрэсію з назоўнікам 2. Як пераўтвараецца такі здабытак, мы ведаем (ст.69). $\rightarrow$ 96.

17. Можна звесці ўсе функцыі да аргумента x, скарыстаўшы формулу сінуса падвоенага аргумента, але што рабіць далей? А ці не запісаць адзінку ў трыганаметрычнай форме? $\rightarrow$ 97.

18. Праз косінус падвоенага аргумента дадзенае раўнанне зводзіцца да раўнання з адной трыганаметрычнай функцыяй з аднолькавым аргументам $sin\, x = 2sin^3\, x - 1 + 2sin^2\, x$. Але раўнанне кубічнае. $\rightarrow$ 98.

19. І функцыя адна, і аргумент аднолькавы, толькі ж раўнанне 4-й ступені. Але ж складнікаў чатыры. Тады – групоўка?.. $\to$ 99.

20. Можна ўспамінаць формулу для адымання косінусаў ($\to$ 100), а можна інакш ($\to$ 140).

21. На першы погляд не бачна, як падступіцца. Але зірнем на функцыі з аднолькавым аргументам $3x$: $2\sin 5x = \cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x$. Выраз правай часткі раўнання можна пераўтварыць у выраз з адной функцыяй. $\to$ 101.

22. Мабыць, пачаць трэба са складання дробаў у левай частцы раўнання. $\to$ 102.

23. Чатыры складнікі – паспрабуем групоўку. Толькі якую? $\to$ 103.

24. Левую частку раўнання можна разглядаць або як рознасць квадратаў, або як рознасць кубаў. Рознасць квадратаў выведзе на суму кубаў і рознасць кубаў. Так што ад кубаў усё адно нікуды не дзецца, лепш ужо з іх пачынаць. Пераўтворым левую частку: $(\cos^2 x)^3 - (\sin^2 x)^3 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x) = \cos 2x((\cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x\sin^2 x + (\sin^2 x)^2 - \cos^2 x\sin^2 x) = \cos 2x(1 - \frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2 = \cos 2x(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x) = \cos 2x(1 - \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x)) = \frac{3}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^3 2x$. Уфф! – урэшце ж выйшлі на адну функцыю з аднолькавым аргументам! $\to$ 104.

25. Тут раскладанне сумы кубаў на множнікі нікуды не выведзе. Трэба шукаць нешта іншае. Прыгледзімся: раўнанне нібыта нагадвае асноўную трыганаметрычную тоеснасць: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Толькі замест квадратаў – кубы. Але кубы правільных дробаў заўсёды меншыя за іх квадраты (прыпамінайце, якія дробы называюць правільнымі). $\to$ 105.

26. Калі здабытак бывае роўным нулю, – мы ведаем. А калі бывае роўнай нулю сума двух лікаў? $\to$ 106.

27. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ – тут рознасць квадратаў, якая раскладваецца на множнікі, а справа – сума кубаў, якая таксама раскладваецца на множнікі; сярод гэтых множнікаў мабыць знойдуцца аднолькавыя. $\to$ 107.

28. Аргументы розныя і не бачна, як зрабіць іх аднолькавымі. Нічога не застаецца, акрамя лабавога штурма: скарыстаць формулы сінуса сумы і косінуса сумы. $\to$ 108.

29. $1 - 4\sin x\cos x - \sin x + \cos x = 0$. Чатыры складнікі, таму напрошваецца групоўка, але яна нічым не дапаможа: усё блытае каэфіцыэнт 4. Можна звесці ўсе функцыі да палавіннага аргумента і праз гэта паспрабаваць выйсці на аднароднае раўнанне ($\rightarrow$ 109). Ці паспрабаваць нешта іншае ($\rightarrow$ 149).

30. Калі вы ўважліва вывучылі разнастайныя падыходы да развязвання папярэдняга раўнання, то з гэтым раўнаннем не павінна быць праблем. $\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x) = 4\sin x \cos x$ – увядзём дзве новыя зменныя $\sin x + \cos x = ю$, $\sin x \cos x = ф$. Тады $ю^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1{+}2ф$ і $\sqrt{2}\,ю = 4ф$. $\rightarrow$ 110.

31. Паколькі тут прысутнічае квадратны корань, які не ўсякія лікі прымае да сябе, то й пачнем з высвятлення таго, якія лікі можа прымаць гэты корань. Гэтыя лікі знойдзем з няроўнасці $4\pi^2 - x^2 \geq 0$: $x \in [-2\pi;\, 2\pi]$. Цяпер можна прыступаць да развязвання раўнання.

$2\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 0$ або $4\pi^2 - x^2 = 0$. $\rightarrow$ 111.

32. Карані трэба шукаць там, дзе $\sin x \geq 0$ і $|tg\, x| \leq 1$ (г.зн. у тых палавінках першай і другой чвэрцяў, якія бліжэй да восі абсцыс). Пры пазначаных умовах дадзенае раўнанне раўназначнае раўнанню $6(\cos^2 x - \sin^2 x) = 16 \sin^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow 3 \cos 2x = 2\sin 2x \Leftrightarrow tg\, 2x = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 0{,}5 arctg 1{,}5 + 0{,}5n\pi;\ n \in Z$. З гэтымі лікамі трэба далей разбірацца. $\rightarrow$ 112.

33. $\sqrt{-15\cos x} = -2\sin x$. Карані гэтага раўнання трэба шукаць там, дзе $\sin x \leq 0$ і $\cos x \leq 0$ (III чвэрць). Далей проста. $\rightarrow$ 113.

34. Пачнем з формулы для сінуса сумы. $\rightarrow$ 114.

35. Аглядваючыся на выраз пад квадратным коранем, які павінен быць неадмоўным, высвятляем, што карані раўнання трэба шукаць на прамежку [–3; 3]. І адразу адзначым, што канцы гэтага прамежку якраз і з’яўляюцца каранямі раўнання.

Засталося <u>на тым жа прамежку</u> развязаць ужо крыху знаёмае раўнанне $5 - 3\sin 2x + 7\sin x - 7\cos x = 0$ (знаёмае, бо падобнае на раўнанні 29-31). $\rightarrow$ 115.

36. Пачнем з формул паніжэння ступені. $\rightarrow$ 116.

37. Можна было б пачаць з дамнажэння ўсіх складнікаў на $\sin x$. Але... $\rightarrow$ 117.

38. Тут прапорцыя. Можна скарыстаць яе ўласцівасць, каб пазбавіцца ад дробаў. $\rightarrow$ 118.

39. Відавочна, што пры $\cos x = 0$ дадзенае раўнанне праўдзіцца. Тады $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in Z$) – карані раўнання. $\rightarrow$119.

40. З тангенсамі формул няшмат, з сінусамі і косінусамі болей. $tg\, 3t + tg\, t = \frac{\sin 3t}{\cos 3t} + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin 3t \cos t + \sin t \cos 3t}{\cos 3t \cos t} = \frac{\sin 4t}{\cos 3t \cos t}$.

І цяпер раўнанне $\frac{\sin 4t}{\cos 3t \cos t} = 2sin\ 4t$ распадаецца на два раўнанні. $\rightarrow$ 120.

41$_{\leftarrow 75\leftarrow 155\leftarrow 115\leftarrow 35}$. $x = -\frac{\pi}{4} \pm arccos\frac{\sqrt{2}}{6} + 2n\pi$; $n \in$ Z. Два пункты на акружыне. Але прамежак [–3; 3] займае не ўсю акружыну. Таму з гэтымі пунктамі трэба яшчэ разбірацца. $\rightarrow$ 76.

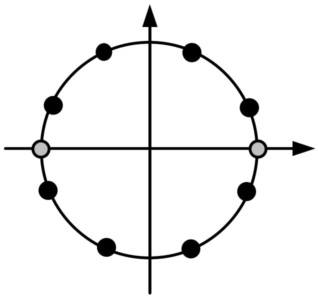
42$_{\leftarrow 82\leftarrow 149\leftarrow 29}$. Развязваючы сістэму (2), заўважым, што другое яе раўнанне вынікае з першага пры ўмове, што косінус большы за сінус і яны аднолькавых знакаў (калі $sin\ x\ cos\ x = \frac{3}{8}$, то $-2sin\ x\ cos\ x = -\frac{3}{4}$, адсюль $cos^2 x - 2sin\ x\ cos\ x + sin^2 x = \frac{1}{4}$, а гэта тое ж, што $cos\ x - sin\ x = \frac{1}{2}$, калі $cos\ x > sin\ x$). Гэтая заўвага дазваляе развязаць толькі першае раўнанне ($sin\ 2x = \frac{3}{4}$) пры пазначаных умовах. Атрымаем: $x = \frac{(-1)^k arcsin\frac{3}{4} + \pi k}{2}$ ($k \in$ Z). Гэта 4 пункты акружыны. Засталося высветліць, якія з іх задавальняюць пазначаным умовам. Для гэтага адзначым, што $arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} < arcsin\frac{3}{4} < arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, гэта азначае, што $arcsin\frac{3}{4} \in (45^\circ; 60^\circ)$. Тады пры $k = 0$ атрымаем $x_0 \in (22{,}5^\circ; 30^\circ)$ – на гэтым прамежку сінус і косінус дадатныя і косінус большы за сінус; пры $k = 1$ атрымаем $x_1 \in (60^\circ; 67{,}5^\circ)$ – тут ужо сінус большы за косінус і зноў жа яны дадатныя; пры $k = 2$ атрымаем $x_2 \in (202{,}5^\circ; 210^\circ)$ – прамежак з першай паловы трэцяй чвэрці, дзе косінус бліжэй да мінус адзінкі, чым сінус, таму косінус меншы за сінус; і пры $k = 3$ атрымаем $x_3 \in (240^\circ; 247{,}5^\circ)$ – прамежак з другой паловы трэцяй чвэрці, дзе сінус і косінус адмоўныя і косінус большы за сінус.

Такім чынам, задавальняюць умовам x_0 і x_3. Тады x_0, x_4, x_8, x_{12},.. і ўвогуле x_{4n} (г.зн. пры $k = 4n$) утвараюць адну групу кораняў, а x_3, x_7, x_{11}, x_{15},.. і ўвогуле x_{4m+3} (г.зн. пры $k = 4m + 3$) – другую (n і m – цэлыя). У адказ, акрамя раней пазначаных, пойдуць лікі $\frac{1}{2}arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}arcsin\frac{3}{4} + 2\pi m$ ($m, n \in$ Z). $\rightarrow$ 72.

43$_{\leftarrow 78 \leftarrow 158 \leftarrow 118 \leftarrow 38}$. Не, яшчэ не адказ. Напачатку былі дробы, ад якіх мы так філігранна пазбавіліся. А ў дробаў назоўнік не павінен быць роўным нулю. Паглядзім, пры якіх x адзін ці другі назоўнік роўны нулю. → 73.

44$_{\leftarrow 77 \leftarrow 152 \leftarrow 89 \leftarrow 9}$. *Адказ*: $-2arctg\frac{2}{11} \pm 2arccos\frac{\sqrt{5}}{5} + 4\pi k$; $k \in Z$. *(Параўнайце яго з адказам, знойдзеным на іншым шляху* – п.49 – *і прачытайце каментар да яго.)*

45$_{\leftarrow 125 \leftarrow 85 \leftarrow 5}$. $sin\ x = 0$ або $cos\ 4x = 0$. Адказ на малюнку (10 пунктаў акружыны, з якіх два шэрых – да першага раўнання, астатнія 8 чорных – да другога).

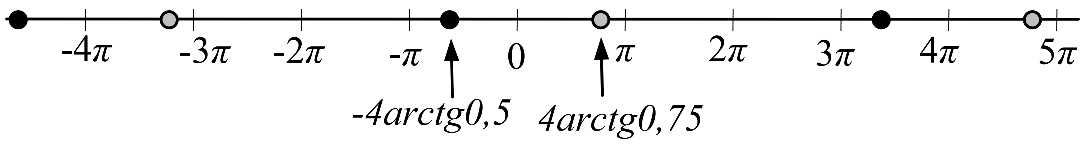


46$_{\leftarrow 126 \leftarrow 86 \leftarrow 6}$. $tg\ 3x = 1$ або $tg\ 3x = 1{,}5$. *Адказ*: $\frac{arctg 1,5 + n\pi}{3}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$; k, $n \in Z$. *(Помніце: атрыманы адказ можна паказваць пунктамі акружыны толькі тады, калі яго перыяд складае нейкую долю акружыны ці адну цэлую акружыну. Тут перыяд складае* $\frac{\pi}{3}$ *– адну шостую долю акружыны, таму гэты адказ можна паказаць на акружыне. Атрымаецца 6 пунктаў з першай формулы адказу і 6 – з другой, усяго 12 пунктаў.)*

47$_{\leftarrow 167 \leftarrow 57 \leftarrow 137 \leftarrow 97 \leftarrow 17}$. *Адказ*: $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$; $k, m, n \in Z$.

48$_{\leftarrow 123 \leftarrow 75 \leftarrow 155 \leftarrow 115 \leftarrow 35}$. Паспрабуем разабрацца межавымі развазаннямі ў градусах. 3 радыяны = $\frac{540^o}{\pi} \approx 172^o$ (дакладней так: $3 \in (171^o;\ 172^o)$). Тады прамежак $(-170^o;\ 170^o)$ цалкам уваходзіць у прамежак $[-3;\ 3]$. $\frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{1}{2}$, адсюль вынікае, што $arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} \in (0^o;\ 30^o)$. Тады пры $k = 0$ атрымаем $x = 45^o - arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$ – гэты лік на прамежку $(15^o;\ 45^o)$, які цалкам змяшчаецца ў прамежку $(-170^o;\ 170^o)$, а значыць і ў прамежку $[-3;\ 3]$. Пры $k = 1$ маем: $x = \frac{\pi}{4} + arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} + \pi$ – гэты лік большы за π, а таму большы і за 3. Пры $k = -1$ маем $x = \frac{\pi}{4} + arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} - \pi = -\frac{3\pi}{4} + arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} = -135^{o} + arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$ – гэты лік на прамежку (-135^{o}; -105^{o}), які таксама цалкам змяшчаецца ў прамежку (-170^{o}; 170^{o}), а значыць і ў прамежку [–3; 3]. Пры $k = -2$ (ці меншых k) атрымаецца ўжо лік, меншы за –3. $\rightarrow$ 153.

49$_{\leftarrow 129 \leftarrow 9}$. *Адказ*: $-4arctg\frac{1}{2} + 4\pi k$; $4arctg\frac{3}{4} + 4\pi n$; $k, n \in Z$. *(Адназначым, што перыяд адказу 4π большы за даўжыню акружыны, таму паказваць атрыманыя пункты на акружыне не варта. Іх можна пры патрэбе паказаць на лікавай прамой. Прыгледзімся да гэтай прамой: чорнымі і шэрымі кружочкамі паказаны корані раўнання; і можна заўважыць прамежкі <u>даўжынёй у акружыну</u>, напрыклад ад π да 3π, дзе кораняў раўнання няма.)*



50$_{\leftarrow 79 \leftarrow 159 \leftarrow 119 \leftarrow 39}$. Але 3 – лік з другой чвэрці і таму ён не корань. $\rightarrow$ 68.

51$_{\leftarrow 80 \leftarrow 160 \leftarrow 120 \leftarrow 40}$. $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} < -1$, таму развязваць трэба толькі адно з гэтых раўнанняў: $cos\ 2t = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. $\rightarrow$ 67.

52$_{\leftarrow 163 \leftarrow 124 \leftarrow 82 \leftarrow 149 \leftarrow 29}$. Самы кароткі спосаб развязвання гэтага раўнання, мабыць, будзе наступным. Калі раўнанне $1 - 4sin\ x\ cos\ x - sin\ x + cos\ x = 0$ перапісаць так: $-1 + 2(1 - 2sin\ x\ cos\ x) + (cos\ x - sin\ x) = 0$, то выраз у дужках ёсць квадрат рознасці: $(cos\ x - sin\ x)^2$ (пераканайцеся!). Тады можна ўвесці новую зменную ($cos\ x - sin\ x = u$). І атрымаем простае квадратнае раўнанне $2u^2 + u - 1 = 0$. Яго корані: –1 і $\frac{1}{2}$. Цяпер дадзенае раўнанне распалася на два раўнанні кшталту $asin\ x + bcos\ x = c$: $cos\ x - sin\ x = -1$ і $cos\ x - sin\ x = \frac{1}{2}$, раўназначныя раўнанням $cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $\rightarrow$ 122.

53$_{\leftarrow 133 \leftarrow 93 \leftarrow 13}$. $sin\ x = 0$ або $cos\ 5x = 0$. *Адказ*: πn; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$; $k, n \in Z$.

54$_{\leftarrow 14}$. Атрымаць 2 ў гэтым складанні можна толькі тады, калі $sin^4 x = 1$ ($\Leftrightarrow sin^2 x = 1 \Leftrightarrow cos\ x = 0$) і $cos^2 2x = 1$ ($\Leftrightarrow sin\ 2x = 0 \Leftrightarrow sin\ x = 0$ *або* $cos\ x = 0$). *Адказ*: $\frac{\pi}{2} + \pi m$; $m \in Z$. *(Варта звярнуць увагу менавіта на гэты развязак, параўнайце яго з іншымі.)*

55$_{\leftarrow 135 \leftarrow 95 \leftarrow 15}$. $cos\ x + 4sin^2 x\ cos\ x = 0$. $\rightarrow$ 165.

56$_{\leftarrow 166 \leftarrow 66 \leftarrow 146 \leftarrow 106 \leftarrow 26}$. *Адказ*: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $k, n \in Z$.

57$_{\leftarrow 137 \leftarrow 97 \leftarrow 17}$. $sin\ x + cos\ x = 0$ або $sin\ x + cos\ x = 1$. Першае раўнанне – аднароднае першай ступені, другое ... $\rightarrow$ 167.

58$_{\leftarrow 68 \leftarrow 50 \leftarrow 79 \leftarrow 159 \leftarrow 119 \leftarrow 39}$. *Адказ*: 1; $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $k \in Z$.

59$_{\leftarrow 139 \leftarrow 99 \leftarrow 19}$. Такім чынам, атрымалі 4 прасцейшыя раўнанні $cos\ x = 1$ або $cos\ x = -\frac{1}{2}$ або $cos\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Адказ: $\pm arccos\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} + 2\pi n$; $2\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$; $k, m, n \in Z$.

60$_{\leftarrow 73 \leftarrow 43 \leftarrow 78 \leftarrow 158 \leftarrow 118 \leftarrow 38}$. Для зручнасці перапішам нібыта адказ у градусах: $9^o + 36^o k$. І высвятляецца, што пры $k = 1$ (а далей пры $k = 6$, $k = 11$, $k = 16$,.. увогуле пры $k = 5n + 1$; $n \in Z$) атрымоўваюцца забароненыя пункты.

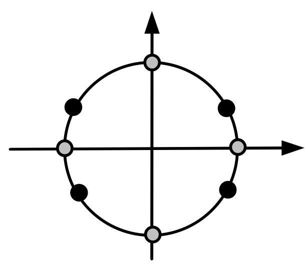
Адказ: $\frac{\pi + 4\pi k}{20}$; $k \neq 5n + 1$; $k, n \in Z$.

61$_{\leftarrow 101 \leftarrow 21}$. Калі $sin\ p = sin\ q$, то пункты p і q на акружыне або супадаюць, або сіметрычныя адносна восі ардынат (гэта значыць, аднолькавыя дугі адкладзены ад 0 і ад π у супрацьлеглых кірунках). Таму лікі p і q звязаны такімі суадносінамі: $p = q + 2\pi k$ або $p = \pi - q + 2\pi m$ ($k, m \in Z$), якія можна замяніць адной роўнасцю $p = (-1)^n q + \pi n$ ($n \in Z$). З гэтага для дадзенага раўнання атрымаем: $5x = \frac{\pi}{6} - 3x + 2\pi k$ або $5x = \pi - \frac{\pi}{6} + 3x + 2\pi m$. *Адказ*: $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{4}$; $\frac{5\pi}{12} + \pi m$; $k, m \in Z$ (*10 пунктаў на акружыне – чаму 10?*).

62$_{\leftarrow 142 \leftarrow 102 \leftarrow 22}$.

$sin\ 4x + sin\ 2x = 2sin\ 4x \Leftrightarrow sin\ 4x = sin\ 2x$.

Адказ – на малюнку (і $\rightarrow$ 162).



63$_{\leftarrow 143\leftarrow 103\leftarrow 23}$. *Адказ*: $-\frac{\pi}{4} + \pi d$; $d \in Z$.

64$_{\leftarrow 134\leftarrow 14}$. $\cos 2x = \frac{7}{5}$ без кораняў. А раўнанне $\cos 2x = -1$ мае корані. *Адказ*: $\frac{\pi}{2} + \pi m$; $m \in Z$. *(Варта паглядзець іншыя развязкі.)*

65$_{\leftarrow 76\leftarrow 41\leftarrow 75\leftarrow 155\leftarrow 115\leftarrow 35}$.

Адказ: -3; $-\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$; $-\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$; 3.

66$_{\leftarrow 146\leftarrow 106\leftarrow 26}$. Выходзіць, – ну і хай сабе выходзіць. Тады трэба развязваць сістэму з двух раўнанняў: $\cos 5x + \cos 7x = 0$ і $\sin x + \sin 7x = 0$. $\rightarrow$ 166.

67$_{\leftarrow 51\leftarrow 80\leftarrow 160\leftarrow 120\leftarrow 40}$.

Адказ: $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi n$; $\frac{\pi k}{4}$; $k \neq 4m + 2$; $k, m, n \in Z$.

68$_{\leftarrow 50\leftarrow 79\leftarrow 159\leftarrow 119\leftarrow 39}$. Калі $\cos x < 0$ (гэта II і III чвэрці), то $|\cos x| = -\cos x$ і дадзенае раўнанне пераўтвараецца ў такое $(x - 2)^2 = -1$. Тут кораняў не можа быць. $\rightarrow$ 58.

69$_{\leftarrow 109\leftarrow 29}$. Другое з атрыманых раўнанняў – аднароднае трэцяй ступені, дзяленнем на $\cos^3\frac{x}{2}$ яно зводзіцца да алгебраічнага раўнання трэцяй ступені $3t^3 + t^2 - 5t + 1 = 0$, дзе $t = tg^3\frac{x}{2}$. Відавочна, што $t = 1$ – яго корань, тады можна выдзеліць множнік $(t - 1)$: $(3t^3 - 3t) + (t^2 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow 3t\,(t - 1)\,(t + 1) + (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ або $3t^2 + 4t - 1 = 0$. $\rightarrow$ 161.

70$_{\leftarrow 150\leftarrow 110\leftarrow 30}$. Паколькі першае раўнанне ў кожнай сістэме задае менш пунктаў на акружыне, чым другое, то будзем развязваць першае раўнанне і атрыманыя лікі правяраць на другім раўнанні.

З першай сістэмы: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; з другой: $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ ($x = \frac{11\pi}{12} + 2n\pi$ або $x = -\frac{5\pi}{12} + 2m\pi$). Няцяжка пераканацца, што другое раўнанне кожнай сістэмы прымае атрыманыя лікі. Засталося паглядзець на тры атрыманыя пункты на трыганаметрычнай акружыне. $\rightarrow$ 84.

71$_{\leftarrow 151\leftarrow 111\leftarrow 31}$. Тры пункты на акружыне ($\rightarrow$ п.30д) – гэта бясконца многа лікаў. Але ж развязкі дадзенага раўнання павінны брацца толькі з прамежку $[-2\pi; 2\pi]$ – гэта дзве поўныя акружыны і яшчэ адзін пункцік (бо нулявы пункт акружыны сюды дае аж тры лікі). Тады ў адказ пойдуць не бясконца многа, а толькі 6 лікаў. У дадатак да тых двух, якія ўжо названыя раней (→ 111).

Адказ: -2π; $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{12}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; 2π.

72$_{\leftarrow 42 \leftarrow 82 \leftarrow 149 \leftarrow 29}$. *Адказ*: $\pi + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$; $\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} arcsin\frac{3}{4} + 2\pi q$; $\frac{1}{2} arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n$; ($k$, m, n, $q \in$ Z). Параўнайце з адказам, атрыманым іншымі спосабамі. → 161, 163 і 122.

73$_{\leftarrow 43 \leftarrow 78 \leftarrow 158 \leftarrow 118 \leftarrow 38}$. Першы назоўнік роўны нулю, калі $sin\ x = -cos\ x \Leftrightarrow tg\ x = -1$. Аналагічна другі назоўнік роўны нулю, калі $tg\ x = 1$. Такім чынам, 4 пункты акружыны (сярэдзіны кожнай чвэрці: 45°, 135°, 225° і 315°) пазбаўлены права быць каранямі дадзенага раўнання. У праекце атрыманага адказу – 10 пунктаў акружыны (ці 5 пунктаў на паўакружыне – можна тут гаварыць пра паўакружыну, бо π ёсць перыяд тангенса, з якога выйшлі на забароненыя пункты). Ці ёсць забароненыя пункты сярод атрыманых у адказе? → 60.

74$_{\leftarrow 154 \leftarrow 114 \leftarrow 34}$. $tg\ x = \frac{1}{\cos 3}$. Гэтае раўнанне задае на акружыне 2 пункты, з якіх у I чвэрць трапляе толькі адзін.

Адказ: $arctg\frac{1}{\cos 3} + 2k\pi$; $k \in$ Z.

75$_{\leftarrow 155 \leftarrow 115 \leftarrow 35}$. З улікам абмежаванасці сінуса і косінуса адзначым, што –2 ў першым раўнанні можа атрымацца толькі тады, калі $sin\ x = -1$ і $cos\ x = 1$. Але так ніколі не бывае, бо $sin^2\ x + cos^2\ x = 1$. Таму першае раўнанне кораняў не мае.

Развязваць жа другое раўнанне будзем у такім варыянце, які вы выбіраеце: $sin\ (x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$ (→ 123) або $cos\ (x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{6}$ (→ 41).

76$_{\leftarrow 41 \leftarrow 75 \leftarrow 155 \leftarrow 115 \leftarrow 35}$. Паспрабуем разабрацца межавымі развапражаннямі ў градусах. 3 радыяны = $\frac{540^o}{\pi} \approx 172°$ (дакладней так: $3 \in (171°; 172°)$). Тады прамежак (–170°; 170°) цалкам уваходзіць у прамежак [–3; 3]. $\frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{1}{2}$, адсюль вынікае, што $arccos\frac{\sqrt{2}}{6} \in (60°; 90°)$. Тады пры $n = 0$ атрымаем $x = -45° \pm arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$. Адзін з гэтых лікаў утрымліваецца на прамежку (15°; 45°), другі – на прамежку (–135°; –

105°), якія цалкам змяшчаюцца ў прамежку (–170°; 170°), а значыць і ў прамежку [–3; 3]. Пры іншых n атрымаем лікі, па модулі большыя за 3. → 65.

77$_{\leftarrow 152 \leftarrow 89 \leftarrow 9}$. $\cos\left(\frac{x}{2}+m\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, дзе $m = arctg\frac{2}{11}$. Адказ → 44.

78$_{\leftarrow 158 \leftarrow 118 \leftarrow 38}$. $\sin 5x = \cos 5x \Leftrightarrow tg\, 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi + 4\pi k}{20}$ ($k \in$ Z). Гэта нібыта адказ. → 43.

79$_{\leftarrow 159 \leftarrow 119 \leftarrow 39}$. Дадатковыя корані $x = 1$ або $x = 3$. Але! ... → 50.

80$_{\leftarrow 160 \leftarrow 120 \leftarrow 40}$. $0{,}5(\cos 4t + \cos 2t) = 0{,}5 \Leftrightarrow 2\cos^2 2t + \cos 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$. → 51.

81$_{\leftarrow 1}$. Зразумела, што трэба прымяніць формулу косінуса падвоенага аргумента – тую з трох, дзе косінус выражаецца праз сінус: $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$. Атрымаецца раўнанне $2\sin^2\frac{x}{2} - 5\sin\frac{x}{2} + 2 = 0$. Адказ → 121.

82$_{\leftarrow 149 \leftarrow 29}$. Маем дзве сістэмы:

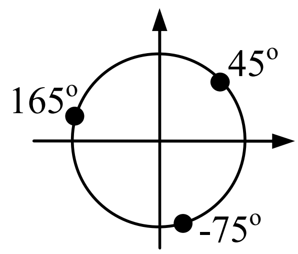
$$(1)\begin{cases}\sin x \cdot \cos x = 0\\ \cos x - \sin x = -1\end{cases} \text{ або } (2)\begin{cases}\sin x \cdot \cos x = \frac{3}{8}\\ \cos x - \sin x = \frac{1}{2}.\end{cases}$$

З першай: $\begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = -1\end{cases}$ або $\begin{cases}\cos x = 0\\ \sin x = 1\end{cases}$ ($x = \pi + 2\pi k$ або $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$).

З другой: $\begin{cases}\cos x = \sin x + \frac{1}{2}\\ 8\sin^2 x + 4\sin x = 3\end{cases}$ – такі працяг напрошваецца (→ 124), але ёсць іншы варыянт. → 42.

83$_{\leftarrow 3}$. $\sin 12x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{12}$. *Адказ*: $\frac{(-1)^n}{12} arcsin\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{12} + \frac{\pi n}{12}$, $n \in$ Z.

84$_{\leftarrow 70 \leftarrow 150 \leftarrow 110 \leftarrow 30}$. Прыгледзеўшыся да трох атрыманых пунктаў на акружыне (у градусах бачна больш выразна), можна заўважыць, што яны размясціліся на акружыне праз роўныя прамежкі па 120°. Таму адказ можна запісаць адным выра-



зам. *Адказ*: $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}$; $k \in Z$.

85$_{\leftarrow 5}$. Пазналі ў правай частцы адзінку? А выраз $2cos\frac{3x}{2}sin\frac{3x}{2}$? – Гэта сінус падвоенага аргумента. $\rightarrow$ 125.

86$_{\leftarrow 6}$. Што рабіць з раўнаннем $2 + cos^2 3x = 5\ sin\ 3x\ cos\ 3x$? Звярніце ўвагу на ступені складнікаў. $\rightarrow$ 126.

87$_{\leftarrow 7}$. Розныя аргументы косінусаў хочацца зрабіць аднолькавымі, таму скарыстаем формулу косінуса падвоенага аргумента: $4(2cos^2 x - 1)^2 + 10\ cos^2 x = 1$. Цяпер напрошваецца падстаноўка $2cos^2 x = \boldsymbol{c}$. $\rightarrow$ 127.

88$_{\leftarrow 8}$. $4x = 2{\cdot}2x$, заўважыўшы гэта, здагадаемся скарыстаць формулы падвоеных аргументаў: $8(cos^2 2x - sin^2 2x) - 5\ cos^2 2x - 2\ sin\ 2x\cdot cos\ 2x = 0$. Спрашчаем, пераконваемся, што $cos\ 2x$ за дужкі не выносіцца, і дзелім усе складнікі гэтага аднароднага раўнання на $-cos^2 2x$. $\rightarrow$ 128.

89$_{\leftarrow 9}$. $8\ cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2} = \frac{5}{2}(1+cos\frac{x}{2}) \Leftrightarrow 11cos\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2} = 5$. $\rightarrow$ 152.

90$_{\leftarrow 10}$. $3 = -4cos\frac{x}{6} + 6cos^2\frac{x}{12} \Leftrightarrow 3 = -4(2cos^2\frac{x}{12} - 1) + 6cos^2\frac{x}{12}$. $\rightarrow$ 130.

91$_{\leftarrow 11}$. Здаецца, $tg15^\circ = 2 - \sqrt{3}$? Сапраўды $tg15^\circ = tg\frac{30^o}{2} = \frac{1-cos30^o}{sin30^o} = 2-\sqrt{3}$. І паколькі $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$, то $ctg15^\circ = tg75^\circ = 2 + \sqrt{3}$. $\rightarrow$ 131.

92$_{\leftarrow 12}$. $cos\ 4x + cos\ 2x = cos\ 12\ x + cos\ 2x \Leftrightarrow cos\ 4x - cos\ 12\ x = 0$. Цяпер трэба ўспамінаць формулу для адымання косінусаў. $\rightarrow$ 132.

93$_{\leftarrow 13}$. Для множання косінуса на сінус няма, ёсць формула для множання сінуса на косінус. Скажаце: тое самае, маўляў, ад перастаноўкі месцамі множнікаў... Але тут гэта істотна, бо ўзнікне пытанне, што ад чаго адымаць. $\rightarrow$ 133.

94$_{\leftarrow 14}$. $sin^4 x + (1 - 2sin^2 x)^2 = 2$. Цяпер, абазваўшы $sin^2 x$ літарай Я, атрымаем квадратнае раўнанне $5Я^2 - 4\ Я - 1 = 0$. $\rightarrow$ 164.

95$_{\leftarrow 15}$. $2cos\ x - cos\ 3x = 0$. Хто не палянуецца, той можа вывесці і скарыстаць формулу косінуса патроенага аргумента $cos\ 3x = \cos\ (2x + x) = cos\ 2x\ cos\ x - sin\ 2x\ sin\ x = \ldots$ А хто палянуецца выводзіць новую формулу,.. $\rightarrow$ 135.

96$_{\leftarrow 16}$. $2(2(2(2(2sinxcosx)cos2x)cos4x)cos8x)cos16x = cos\ (20x - \frac{\pi}{2})$ $\Leftrightarrow$ sin 32x = sin 20x. Рознасць сінусаў... $\rightarrow$ 136.

97$_{\leftarrow 17}$. $2sin\ x\ cos\ x + sin^2\ x + cos^2\ x = sin\ x + cos\ x$. Чым гэта лепш за тое, што было? Калі ідэя развязку яшчэ не кінулася вам у вочы, тады паспрабуйце замяніць $sin\ x$ на a, а $cos\ x$ – на b. $\rightarrow$ 137.

98$_{\leftarrow 18}$. $2y^3 + 2y^2 - y - 1 = 0$. Калі выраз мае 4 складнікі, то даволі часта групоўкай па два яго спрабуюць раскласці на множнікі. Спрыяюць гэтай ідэі і папарна роўныя каэфіцыэнты. $\rightarrow$ 138.

99$_{\leftarrow 19}$. $(8c^4 - 8c^2) - (c - 1) = 0 \Leftrightarrow 8c^2\ (c^2 - 1) - (c - 1) = 0 \Leftrightarrow c = 1$ або $8c^3 + 8c^2 - 1 = 0$. Як развязваць кубічнае раўнанне? Складнікаў усяго тры, групоўка не дапаможа... $\rightarrow$ 139.

100$_{\leftarrow 20}$. $-2sin\frac{6x+5}{2}\ sin\frac{4x-5}{2} = 0$. *Адказ*: $\frac{-5+2\pi k}{6}$; $\frac{5+2\pi n}{4}$; $k, n \in$ Z.

101$_{\leftarrow 21}$. $sin\ 5x = \frac{1}{2}cos\ 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\ 3x \Leftrightarrow sin\ 5x = sin\ (\frac{\pi}{6} - 3x)$. Цяпер можна ўспомніць формулу для адымання сінусаў ($\rightarrow$ 141), а можна інакш ($\rightarrow$ 61).

102$_{\leftarrow 22}$. $\frac{sin3x \cdot sin2x + \cos 3x \cdot \cos 2x}{\sin 2x \cdot cos2x} = \frac{2}{sin3x}$; – прыгледзеўшыся да лічніка і назоўніка першага дробу, заўважым у лічніку косінус рознасці $cos\ (3x - 2x)$. $\rightarrow$ 142.

103$_{\leftarrow 23}$. Напрыклад, такую: $(sin^3\ x + cos^3\ x) + (sin\ x + cos\ x) = 0$. Сума кубаў раскладваецца на множнікі. $\rightarrow$ 143.

104$_{\leftarrow 24}$. $3cos\ 2x + cos^3\ 2x = 8cos^2\ 2x \Leftrightarrow cos\ 2x = 0$ або $cos^2\ 2x - 8cos\ 2x + 3 = 0$. $\rightarrow$ 144.

105$_{\leftarrow 25}$. Такім чынам, пункты акружыны, узятыя не на каардынатных восях, не могуць быць каранямі такога раўнання. Засталося пашукаць карані на каардынатных восях. $\rightarrow$ 145.

106$_{\leftarrow 26}$. Толькі сума супрацьлеглых лікаў роўная нулю. Гэта значыць, адзін з іх дадатны, а другі адмоўны, або абодва роўныя нулю. Але ж тут складваюцца квадраты. $\rightarrow$ 146.

107$_{\leftarrow 27}$. $cos\ x + sin\ x = 0$ або $cos\ x - sin\ x = cos^2\ x - cos\ x\ sin\ x + sin^2\ x$; першае раўнанне – аднароднае, другое ($cos\ x - sin\ x = 1 - cos\ x\ sin\ x$) змяшчае выраз з чатырма складнікамі, які раскладваецца на множнікі групоўкай. $\rightarrow$ 147.

108$_{\leftarrow 28}$. $(\frac{1}{2}sin\ 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}cos\ 2x)(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\ 2x - \frac{1}{2}sin\ 2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$3cos^2\ 2x - sin^2\ 2x = 2$. Далей проста. $\rightarrow$ 148.

109$_{\leftarrow 29}$. $(sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2})^2 - 8\ sin\frac{x}{2}\ cos\frac{x}{2}(\ cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}) - 2\ sin\frac{x}{2}$ $cos\frac{x}{2}(sin^2\frac{x}{2}\ + cos^2\frac{x}{2}) + (cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2})(\ sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}) = 0$. Так атрымоўваецца аднароднае раўнанне чацвёртай ступені. Даволі грувасткае раўнанне! Але, магчыма, яно спросціцца, калі раскрыем дужкі і прывядзем падобныя?

Няхай $sin\frac{x}{2} = \boldsymbol{s}$, $cos\frac{x}{2} = \boldsymbol{c}$. Тады маем:

$s^4 + 2s^2c^2 + c^4 - 8sc^3 + 8s^3c - 2s^3c - 2sc^3 + c^4 - s^4 = 0 \ \Leftrightarrow\ 6s^3c + 2s^2c^2 - 10sc^3 + 2c^4 = 0$ (косінус выносіцца за дужкі, таму на яго адразу дзяліць нельга, можна падзяліць на 2) $\Leftrightarrow$ $c = 0$ або $3s^3 + s^2c - 5sc^2 + c^3 = 0$. $\rightarrow$ 69.

110$_{\leftarrow 30}$. Атрымалі нескладаную сістэму раўнанняў $\begin{cases} 2ю^2 = 2 + 4ф \\ \sqrt{2}ю = 4ф. \end{cases}$

Адыманнем раўнанняў атрымаем квадратнае раўнанне $2ю^2 - \sqrt{2}\,ю - 2 = 0$, корані якога $ю = \sqrt{2}$ або $ю = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Адпаведна $ф = \frac{1}{2}$ або $ф = -\frac{1}{4}$. $\rightarrow$ 150.

111$_{\leftarrow 31}$. Раўнанне $4\pi^2 - x^2 = 0$ мае два корані $x = \pm 2\pi$, якія натуральна належаць пазначанаму прамежку. А для развязвання раўнання $2sin\ 2x - \sqrt{2}\,(sin\ x + cos\ x) = 0$ перапішам яго так: $2(1 + sin\ 2x) - \sqrt{2}\,(sin\ x + cos\ x) - 2 = 0$. І паколькі $1 + sin\ 2x = (sin\ x + cos\ x)^2$, то пасля ўвядзення новай зменнай ($sin\ x + cos\ x = p$) атрымаем квадратнае раўнанне $2p^2 - \sqrt{2}\,p - 2 = 0$. $\rightarrow$ 151.

112$_{\leftarrow 32}$. $arctg1,5$ – лік з першай чвэрці. Паколькі $1 < 1,5 < \sqrt{3}$ і арктангенс – функцыя нарастальная, то $arctg1 < arctg1,5 < arctg\sqrt{3}$, з чаго атрымоўваецца, што $arctg1,5 \in (45^o;\ 60^o)$, а таму $0,5arctg1,5 \in (22,5^o;\ 30^o)$. Гэты прамежак уваходзіць у тую палавінку першай чвэрці, якая бліжэй да восі абсцыс. Перыяд адказу $\frac{\pi}{2}$ і, агледзеўшы атрыманыя 4 пункты на акружыне, пераканаемся, што толькі адзін з іх ёсць корань дадзенага раўнання. *Адказ*: $0,5arctg1,5 + 2\pi k$, $k \in Z$.

113$_{\leftarrow 33}$. $4cos^2\ x - 15cos\ x - 4 = 0 \Leftrightarrow cos\ x = 4$ або $cos\ x = -0,25$. Першае раўнанне кораняў не мае, а другое задае два пункты на акружыне, з якіх толькі адзін трапляе ў трэцюю чвэрць.

Адказ: $-arccos(-\frac{1}{4}) + 2k\pi$; $k \in Z$.

114$_{\leftarrow 34}$. $\sqrt{\sin x \cos 3} = \sqrt{\cos x}$. Корані гэтага раўнання трэба шукаць там, дзе $sin\ x \geq 0$ і $cos\ x \geq 0$ (І чвэрць). $\rightarrow$ 154.

115$_{\leftarrow 35}$. $2 + 3(1 - 2sin\ x\ cos\ x) + 7(sin\ x - cos\ x) = 0 \Leftrightarrow 2 + 3(sin\ x - cos\ x)^2 + 7(sin\ x - cos\ x) = 0$. $\rightarrow$ 155.

116$_{\leftarrow 36}$. $cos\ (6x - \frac{\pi}{2}) + cos\ 5x = 0$. Можна цяпер скарыстаць формулу прывядзення, але тады косінус зменіцца на сінус, а для складання сінуса з косінусам няма формулы. Прыдзецца складваць так, як ёсць. $\rightarrow$ 156.

117$_{\leftarrow 37}$. Але пазначым, што $sin\ x \neq 0$.

$1 - sin\ x\ cos\ x - cos\ x + sin\ x = 0$. Што звычайна робяць з чатырма складнікамі, – не забылі? $\rightarrow$ 157.

118$_{\leftarrow 38}$. $sin\ 6x\ cos\ x - sin\ 6x\ sin\ x = cos\ 6x\ sin\ x + cos\ 6x\ cos\ x$. Атрымаўся радок доўгі як чарвяк. Можна далей перамнажаць сінус на косінус, сінус на сінус... Ёсць адпаведныя формулы і гэта прывядзе да мэты. $\rightarrow$ 158.

119$_{\leftarrow 39}$. Засталося разгледзець іншыя два выпадкі: $cos\ x > 0$ і $cos\ x < 0$. $\rightarrow$ 159.

120$_{\leftarrow 40}$. $sin\ 4t = 0$ (але прасочым, каб назоўнік не стаў нулём) або $cos\ 3t\ cos\ t = 0{,}5$. $\rightarrow$ 160.

121$_{\leftarrow 81 \leftarrow 1}$. *Адказ*: $(-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

122$_{\leftarrow 52 \leftarrow 163 \leftarrow 124 \leftarrow 82 \leftarrow 149 \leftarrow 29}$.

Адказ: $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; $-\frac{\pi}{4} \pm arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\pi n$; $k, n \in Z$.

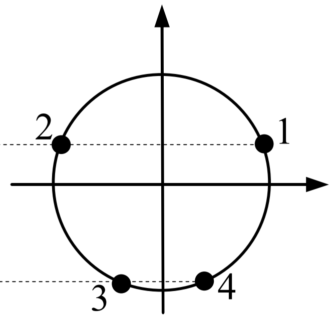
Бывае, што дастаткова дэтальна разабрацца з рознымі развязкамі адной задачы, каб добра ўсвядоміць сутнасць развязвання многіх іншых задач. Гэтае раўнанне – з такіх. Ёсць сэнс вярнуцца да яго яшчэ раз (а мо й не раз).

123$_{\leftarrow 75 \leftarrow 155 \leftarrow 115 \leftarrow 35}$. $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} + k\pi$, $k \in Z$. Два пункты на акружыне. Але прамежак $[-3; 3]$ займае не ўсю акружыну. Таму з гэтымі пунктамі трэба яшчэ разбірацца. $\rightarrow$ 48.

124$_{\leftarrow 82 \leftarrow 149 \leftarrow 29}$. $8sin^2\ x + 4sin\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow sin\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$. Гэта 4 пранумараваныя пункты акружыны – гл.малюнак.

$$\sin x = \frac{-1+\sqrt{7}}{4} \approx 0,4$$

$$\sin x = \frac{-1-\sqrt{7}}{4} \approx -0,9$$



Але ж успомнім і пра першае раўнанне $\cos x = \sin x + \frac{1}{2}$, з якога вынікае, што косінус павінен быць большым за сінус на 0,5. Па гэтай прычыне пункт 2 адпадае, бо там косінус адмоўны, а сінус дадатны. Пункт 4 таксама адпадае, хаця там косінус большы за сінус, але не на 0,5, а значна больш, што відавочна. Для пунктаў 1 і 3 вылічым косінус. Пачнем з пункта 3 (там косінус адмоўны).

$$\cos x_3 = -\sqrt{1-\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{4}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{8+2\sqrt{7}}{16}} = -\sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{16}} = -\frac{\sqrt{7}-1}{4} =$$

$\frac{1-\sqrt{7}}{4}$. Лёгка высветліць, што $\cos x_3$ большы за $\sin x_3$ на 0,5. Тое ж і з пунктам 1. Такім чынам, у адказ дадаткова пойдуць

$x_1 = \arcsin\frac{-1+\sqrt{7}}{4} + 2\pi c$ і $x_3 = \pi - \arcsin\frac{-1-\sqrt{7}}{4} + 2\pi h$ (c, $h \in$ Z). $\to$ 163.

125$_{\leftarrow 85 \leftarrow 5}$. $\sin 5x - \sin 3x = 0$. Маецца формула для адымання сінусаў. $\to$ 45.

126$_{\leftarrow 86 \leftarrow 6}$. Так, гэтае раўнанне можна зрабіць аднародным, дамножыўшы 2 на трыганаметрычную адзінку. $\to$ 46.

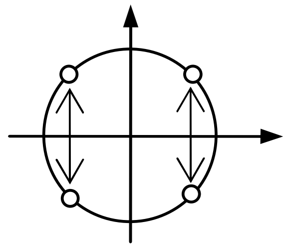
127$_{\leftarrow 87 \leftarrow 7}$. $4(\boldsymbol{c}-1)^2+5\boldsymbol{c}=1 \Leftrightarrow 4\boldsymbol{c}^2-3\boldsymbol{c}+3=0$. Дыскрымінант адмоўны. *Адказ*: раўнанне кораняў не мае. *(Такі адказ лёгка паказаць на акружыне.)*

128$_{\leftarrow 88 \leftarrow 8}$. $8t^2 + 2t - 3 = 0$. $\quad tg\, 2x = -\frac{1}{2}$ або $tg\, 2x = \frac{3}{4}$.

Адказ: $-\frac{1}{2} arctg\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi k$; $\frac{1}{2} arctg\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\pi n$; k, $n \in$ Z. *(Адзначым: перыяд адказу ў адной і другой формуле роўны π/2, таму кожная формула задае па 4 пункты на акружыне.)*

129$_{\leftarrow 9}$. $8(\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}) - 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = 5\cos^2\frac{x}{4}$. Гэта ўжо аднароднае раўнанне, якое зводзіцца да квадратнага: $8t^2+2t-3=0$. Адказ $\to$ 49.

130$_{\leftarrow 90\leftarrow 10}$. $cos^2\frac{x}{12}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow cos\frac{x}{12}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Цяпер, перад тым, як запісваць адказ, варта паглядзець на акружыну. На ёй два пункты з косінусамі $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і два пункты з косінусамі $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ размяшчаюцца раўнамерна – праз прамежкі ў чвэртку акружыны ($\frac{\pi}{2}$). Таму *адказ* для двух раўнанняў можна запісаць адной формулай: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; $k\in Z$.



131$_{\leftarrow 91\leftarrow 11}$. Папярэдняя заўвага дазваляе прасцей запісаць адказ.

$2x = 15^o + 180^o\,k$ або $2x = 75^o + 180^o\,n$ (або ў радыянах: $2x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ або $2x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$). Тут варта спыніцца, каб зрабіць праверку. Справа ў тым, што катангенсы вылічваюцца не для любых пунктаў акружыны. Для пунктаў на восі абсцыс (πm; $m\in Z$) катангенсы не існуюць. У дадзеным жа раўнанні катангенсы вылічваюцца ад $2x$ і ад $4x$. Калі $2x = 15^o + 180^o\,k$ або $2x = 75^o + 180^o\,n$, то $4x = 30^o + 360^o\,k$ або $4x = 150^o + 360^o\,n$. Відавочна, што ніводзін з гэтых пунктаў не трапляе на вось абсцыс. Тады можна спакойна запісваць *адказ*: $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k$; $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n$; $k, n \in Z$.

(*Заўвага*: *адказ* $\frac{1}{2}arctg(2\pm\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$, *таксама правільны і павінен быць прыняты, але яго цяжэй праверыць.*)

132$_{\leftarrow 92\leftarrow 12}$. $sin\,8x = 0$ або $sin\,4x = 0$. *Адказ*: $\frac{\pi k}{8}$; $k\in Z$.

133$_{\leftarrow 93\leftarrow 13}$. $sin\,10x + sin\,4x = sin\,10x + sin\,6x \Leftrightarrow sin\,6x - sin\,4x$. І ўспамінаем, як адымаюцца сінусы. $\rightarrow$ 53.

134$_{\leftarrow 14}$. $\frac{(1-cos2x)^2}{4} + cos^2\,2x = 2$. Замена $cos\,2x$ = Э выведзе на квадратнае раўнанне $5Э^2 - 2Э - 7 = 0$. $\rightarrow$ 64.

135$_{\leftarrow 95\leftarrow 15}$. ... той скарыстае тыя, якія ўжо ведае: $\cos x + (\cos x - \cos 3x) = 0$ (... спачатку рознасць косінусаў) $\Leftrightarrow \cos x - 2\sin 2x \sin(-x) = 0$ (...затым сінус падвоенага аргумента) $\to$ 55.

136$_{\leftarrow 96\leftarrow 16}$. $\sin 6x = 0$ або $\cos 26x = 0$. *Адказ*: $\frac{\pi k}{6}$; $\frac{\pi}{52}+\frac{\pi n}{26}$; $k, n \in \mathrm{Z}$.

137$_{\leftarrow 97\leftarrow 17}$. Ну вось! $(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x$ – квадрат ліку роўны самому ліку! – толькі для адзінкі і нуля. $\to$ 57.

138$_{\leftarrow 98\leftarrow 18}$. $\sin x = 1$ або $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Адказ*: $\frac{\pi}{2}+2\pi m$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $m, n \in \mathrm{Z}$.

139$_{\leftarrow 99\leftarrow 19}$. Можна крыху спрасціць раўнанне заменай $2c = t$:

$t^3 + 2t^2 - 1 = 0$. Але чым гэта дапамагае? Тры складнікі засталіся. Але ж з трох можна зрабіць чатыры, асабліва калі заўважыць каэфіцыэнт 2: $t^3 + t^2 + t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2(t + 1) + (t - 1)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ або $t^2 + t - 1 = 0$ ($t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$). $\to$ 59.

140$_{\leftarrow 20}$. Калі $\cos p = \cos q$, то пункты p і q на акружыне або супадаюць, або супрацьлеглыя (падумайце пра тое ж для сінусаў). Таму лікі p і q звязаны такой суадносінай: $p = \pm q + 2\pi k$ ($k \in \mathrm{Z}$). З гэтага для дадзенага раўнання атрымаем: $5x = \pm(5 + x) + 2\pi k \Leftrightarrow 5x = 5 + x + 2\pi k$ або $5x = -5 - x + 2\pi k$. Адказ $\to$ 100.

141$_{\leftarrow 101\leftarrow 21}$. $\sin(4x - \frac{\pi}{12}) = 0$ або $\cos(x + \frac{\pi}{12}) = 0$. Адказ $\to$ 61.

142$_{\leftarrow 102\leftarrow 22}$. $\cos x \sin 3x = 2\sin 2x \cos 2x$. Правы выраз пазналі? А ў левай частцы перамнажайце сінус на косінус (не косінус на сінус, а сінус на косінус!). $\to$ 62.

143$_{\leftarrow 103\leftarrow 23}$. $\sin x + \cos x = 0$ або $2 - \sin x \ \cos x = 0$. Першае раўнанне – аднароднае, другое развязкаў не мае. $\to$ 63.

144$_{\leftarrow 104\leftarrow 24}$. $\cos 2x = 0$ або $\cos 2x = 4 - \sqrt{13}$.

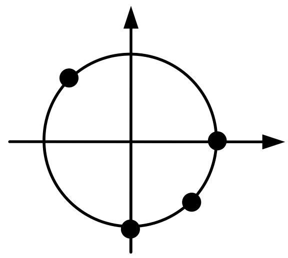
Адказ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $\pm 0{,}5\arccos(4 - \sqrt{13}) + 2\pi n$; $k, n \in \mathrm{Z}$.

145$_{\leftarrow 105\leftarrow 25}$. Непасрэднай праверкай чатырох лікаў высвятляем, што каранямі з'яўляюцца толькі два з іх: 0 і $\frac{\pi}{2}$.

Адказ: $2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $k, n \in \mathrm{Z}$.

146$_{\leftarrow 106\leftarrow 26}$. Складваюцца квадраты? – тады адмоўных тут няма. Выходзіць, што абодва складнікі роўныя нулю? $\to$ 66.

147$_{\leftarrow 107 \leftarrow 27}$. $tg\ x = -1$; $sin\ x = -1$; $cos\ x = 1$. *Адказ* на малюнку.



148$_{\leftarrow 108 \leftarrow 28}$. $cos\ 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Адказ*: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi t$; $t \in Z$.

149$_{\leftarrow 29}$. Для раўнанняў, якія змяшчаюць здабытак сінуса на косінус аднаго і таго ж аргумента і іх суму ці розначсць, маецца сакрэтны прыём, які будзе вядомы толькі таму, хто зазірнуў у гэты пункт. Увядзём дзве новыя зменныя: $sin\ x\ cos\ x = a$, $cos\ x - sin\ x = b$. Тады атрымаем сістэму двух раўнанняў. Першае відавочна: $1 - 4a + b = 0$. Другое атрымаем так: $b^2 = cos^2\ x - 2cos\ x\ sin\ x + sin^2\ x = 1 - 2a$, адкуль множаннем на 2 атрымаем: $4a = 2 - 2b^2$. Заменім у першым раўнанні $4a$ на $2 - 2b^2$ і атрымаем: $2b^2 + b - 1 = 0 \Leftrightarrow\ b = -1$ або $b = 0{,}5$. Адпаведна $a = 0$ або $a = \frac{3}{8}$. → 82.

150$_{\leftarrow 110 \leftarrow 30}$. Маем дзве сістэмы:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Яны лёгка пераўтвараюцца ў сістэмы з двух прасцейшых раўнанняў: $\begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ → 70.

151$_{\leftarrow 111 \leftarrow 31}$. Раўнанні $sin\ x + cos\ x = \sqrt{2}$ або $sin\ x + cos\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ зводзяцца да раўнанняў $sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ або $sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$, адкуль $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ або $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{c+1}\frac{\pi}{6} + c\pi$ (c, $k \in Z$). Апошнюю роўнасць лепш разбіць на дзве – для цотных c ($c = 2n$) $x = -\frac{5\pi}{12} + 2n\pi$ і для няцотных c ($c = 2m + 1$) $x = \frac{11\pi}{12} + 2m\pi$. → 71.

152$_{\leftarrow 89 \leftarrow 9}$. Як выразы кшталту $a\sin\boldsymbol{\varphi} + b\cos\boldsymbol{\varphi}$ пераўтвараюцца ў выразы з адной трыганаметрычнай функцыяй вы ўжо ведаеце. Тут гэта трэба скарыстаць, – пачнем з дзялення ўсіх складнікаў на $5\sqrt{5}$ (адкуль выскачыў гэты лік, спадзяемся, не трэба тлумачыць?) → 77.

153$_{\leftarrow 48 \leftarrow 123 \leftarrow 75 \leftarrow 155 \leftarrow 115 \leftarrow 35}$.

Адказ: –3; $-\frac{3\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$; $\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$; 3.

154$_{\leftarrow 114 \leftarrow 34}$. $\sin x \cos 3 = \cos x$ – аднароднае раўнанне першай ступені. Косінус ікса не можа быць роўным нулю, інакш бы і сінус быў бы нулём, што немагчыма, таму на $\cos x$ можна дзяліць. → 74.

155$_{\leftarrow 115 \leftarrow 35}$. $\sin x - \cos x = -2$ або $\sin x - \cos x = -\frac{1}{3}$. Дамнажэннем абедзвюх частак другога раўнання на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($= \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$) выйдзем на прасцейшае раўнанне $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$ або (калі камусьці так болей падабаецца) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Першае ж раўнанне развязваецца яшчэ прасцей. → 75.

156$_{\leftarrow 116 \leftarrow 36}$. $\cos(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$ або $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$.

Адказ: $\frac{3\pi}{22} + \frac{2\pi k}{11}$; $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $k, n \in Z$. Першым выразам задаюцца 11 пунктаў акружыны, другім – адзін. Калі б гэты адзін змяшчаўся сярод тых адзінаццаці, то другі выраз можна было б у адказ не заносіць. Можа, так і ёсць?

157$_{\leftarrow 117 \leftarrow 37}$. $(1 + \sin x)(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$або $\cos x = 1$. Але там, дзе косінус роўны адзінцы, сінус роўны нулю, што, як раней пазначана, немагчыма. *Адказ*: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$.

158$_{\leftarrow 118 \leftarrow 38}$. А можна пашукаць, як скараціць гэты працэс. Выразы, падобныя да тых, якія мы тут бачым, сустракаюцца ў формулах сінуса і косінуса сумы і рознасці. Паспрабуем убачыць і вылучыць гэтыя выразы. $\sin 6x \cos x - \cos 6x \sin x = \cos 6x \cos x + \sin 6x \sin x -$

пасля такіх пераносаў бачым злева сінус рознасці, а справа косінус рознасці. $\rightarrow$ 78.

159$_{\leftarrow 119 \leftarrow 39}$. Калі $cos\ x > 0$ (гэта IV і I чвэрці), то $|cos\ x| = cos\ x$ і дадзенае раўнанне пераўтвараецца ў такое $(x-2)^2 = 1$. $\rightarrow$ 79.

160$_{\leftarrow 120 \leftarrow 40}$. З першага раўнання $t = \dfrac{\pi k}{4}$, але пры $k = 2$, $k = 6$, $k =$ 10… (увогуле пры $k = 4m + 2$, m – цэлы лік) назоўнік роўны нулю, таму гэтыя k трэба адкінуць. У другім раўнанні прыдзецца перамнажаць косінусы. $\rightarrow$ 80.

161$_{\leftarrow 69 \leftarrow 109 \leftarrow 29}$. $cos\dfrac{x}{2} = 0$ або $tg\dfrac{x}{2} = 1$ або $tg\dfrac{x}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$.

Адказ: $\pi + 2\pi k$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$; $2arctg\dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3} + 2\pi n$; $k, m, n \in Z$.

Параўнайце з адказам, атрыманым іншымі спосабамі. $\rightarrow$ 72, 163 і 122.

162$_{\leftarrow 62 \leftarrow 142 \leftarrow 102 \leftarrow 22}$. $sin\ 2x = 0$ або $cos\ 2x = 0{,}5$.

Адказ: $\dfrac{\pi k}{2}$; $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$; $k, n \in Z$.

163$_{\leftarrow 124 \leftarrow 82 \leftarrow 149 \leftarrow 29}$. *Адказ*: $-arcsin\dfrac{-1-\sqrt{7}}{4} + (2h+1)\pi$; $\pi + 2\pi k$; $arcsin\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4} + 2\pi c$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$; ($c, h, k, m \in Z$). Параўнайце з адказам, атрыманым іншымі спосабамі. $\rightarrow$ 72, 122 і 161.

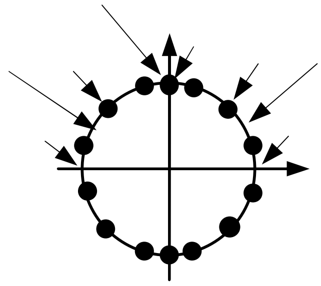
Для таго, хто дабраўся да гэтага месца, ёсць узнагарода. Зазірніце ў п. 52.

164$_{\leftarrow 94 \leftarrow 14}$. $sin^2 x = -\dfrac{1}{5}$ – гэтае раўнанне кораняў не мае. А другое раўнанне $sin^2 x = 1$ раўназначнае раўнанню $cos^2 x = 0$, адкуль $cos\ x = 0$. *Адказ*: $\dfrac{\pi}{2} + \pi m$; $m \in Z$. *(Варта паглядзець іншыя развязкі.)*

165$_{\leftarrow 55 \leftarrow 135 \leftarrow 95 \leftarrow 15}$. *Адказ*: $\dfrac{\pi}{2} + \pi c$; $c \in Z$.

166$_{\leftarrow 66 \leftarrow 146 \leftarrow 106 \leftarrow 26}$. $\begin{cases} cos5x + cos7x = 0 \\ sinx + sin7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos6xcosx = 0 \\ sin4xcos3x = 0. \end{cases}$

Першае раўнанне праўдзіцца пры $x = 90^\circ + 180^\circ k$ або $x = 15^\circ + 30^\circ n$ ($k, n \in Z$), з градусамі ў такіх выпадках зручней. Другое – пры $x = 45^\circ m$ або $x = 30^\circ + 60^\circ p$ ($m, p \in Z$). Паколькі перыяды ўсіх чатырох атрыманых роўнасцяў (180°, 30°, 45°, 60°) складаюць долю акружыны, то можна паглядзець атрыманыя адказы на акружыне (чорныя пункты для першага раўнання, стрэлкі – для другога). Можна нават на палове акружыны, бо 180° – агульны перыяд для ўсіх роўнасцяў.



Чорныя кружочкі, на якія паказваюць стрэлкі, і ёсць развязкі сістэмы. На верхняй палове акружыны іх тры: 45°, 90° і 135°.

Адказ $\rightarrow$ 56.

167$_{\leftarrow 57 \leftarrow 137 \leftarrow 97 \leftarrow 17}$. ... другое пераўтвараецца ў раўнанне з адной трыганаметрычнай функцыяй: $cos\ (x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ [або $sin\ (x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$]. $\rightarrow$ 47.

Далей працягвайце без дапаможніка (дапаможнікам пры патрэбе стане настаўнік ці сябрук-сяброўка).

41) $cos\ 3x + sin\ 3x = \sqrt{2}$ (у адказ запісаць найбольшы корань з прамежку [3; 7]);

42) $sin^2 3x + sin^2 4x = sin^2 5x + sin^2 6x$;

43) $cos\ (20^{\circ} + x) + cos\ (100^{\circ} - x) = 0{,}5$;

44) $16\ sin^2 x + 2\ cos\ 4x = 3$;

45) $sin\ x - cos\ x = 4 sin\ x\ cos^2 x$ (назваць найбольшы корань з прамежку $[\frac{7\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}]$);

46) $3 sin\ \pi x + x^2 - 3x + 5{,}25 = 0$;

47) $\frac{\cos x - 2\sin x \sin 2x}{1 + \sin 3x} = 0$;

48) $3 + ctg^2 x\ cos\ x = ctg^2 x + 3 cos\ x$;

49) $sin\ 3x\ (3 tg\ 3x + ctg\ 3x) = 5$ (у адказ запішыце сярэдняе арыфметычнае кораняў з прамежку $[\pi; 2{,}5\pi]$);

50) $4 sin\ (2x - \frac{\pi}{8}) + 3 sin^2 (\frac{\pi}{5} - 5x) - sin^3 (\frac{\pi}{12} + 3x) - 2 sin^4 x = \pm 8$;

51) $1 - 2 sin^2 x + \sqrt{3}\, sin\ 2x = 12x^2 - 4\pi x + \frac{\pi^2}{3} + 2$;

52) $sin^2\, x\,(1 + tg\, x) = 3sin\, x(cos\, x - sin\, x) + 3$ (назавіце колькасць кораняў на прамежку (1; 5));

53) $\sqrt{3}\, sin\, 2x + cos\, 4x = cos\, 8x$ (у адказ запішыце сярэдняе арыфметычнае кораняў з прамежку (–90°; 0°]);

54) $2cos\, 3x = \sqrt{3}\, cos\, x - sin\, x$;

55) $cos\frac{x}{6}\ (cos\frac{x}{6} + 2\sqrt{2}\, sin\frac{x}{6}) + 1 = 0$;

56) $cos^2\, 6x + 2sin^2\, 3x - 3 = 0$ (у адказ – самы вялікі корань (у градусах) з прамежку [1000°; 2000°]);

57) $sin\,(15^\circ + x) + sin\,(45^\circ - x) = -0{,}5$ (у адказ – найменшы корань (у градусах) з прамежку [–2000°; –1000°]);

58) $1 - cos\, 6x = tg\, 3x$;

59) $sin\, x\, cos\, x\, cos\, 2x\, cos\, 8x = 0{,}25sin\, 12x$;

60) $tg\,(70^\circ + x) + tg\,(20^\circ - x) = 2$ (у адказ запішыце сярэдняе арыфметычнае кораняў у градусах з прамежку (–7; 9) – прамежак зададзены радыянамі);

61) $3 - 3sin\frac{x}{6} + sin^4\frac{x}{6} = 1 + cos^4\frac{x}{6}$ (колькі кораняў на прамежку $(-7\pi;\ \frac{5\pi}{2}]$?);

62) $|sin\, x| = sin\, x + 2cos\, x$;

63) $sin\,(x + 123) + sin\,(x - 123) = sin\, 2x$;

64) $sin^2\, 2x + 0{,}5\cos\, 4x + 2sin^2\, x + cos\, 2x = 1{,}5$;

65) $ctg^3\, x + sin^{-2}\, x - 3ctg\, x - 4 = 0$;

66) $\frac{1}{1+\cos^2 z} + \frac{1}{1+\sin^2 z} = \frac{16}{11}$;

67) $tg\,(x - 75^\circ)\, ctg\,(x + 75^\circ) = \frac{1}{3}$;

68) $tg\, 60x + tg\, 50^\circ + tg\, 70^\circ = tg\, 60x\, tg\, 50^\circ\, tg\, 70^\circ$;

69) $tg\,\frac{x}{2}\, tg\, 80^\circ + tg\, 80^\circ\, tg\, 40^\circ + tg\, 40^\circ\, tg\,\frac{x}{2} = 1$;

70) $cos\, x\, cos\, 2x\, cos\, 4x = \frac{1}{8}$;

71) $0{,}5sin\, 4x\, sin\, x + sin\, 2x\, sin\, x = 2cos\, x$;

72) $3ctg\, u - 3tg\, u + 4sin\, 2u = 0$;

73) $4sin\, 2x\, sin\, 5x\, sin\, 7x - sin\, 4x = 0$;

74) $tg\, x + cos^{-1}\, x = ctg\, x + sin^{-1}\, x$;

75) $tg\, x - tg\, 2x = sin\, x$;

76) $sin^6 x + cos^6 x = \frac{7}{16}$;

77) $tg\, x + tg\, 2x + tg\, 3x = 0$;

78) $cos\, 2x = sin^3 x + cos^3 x$;

79) $\frac{ctgx}{\cos 2x} = 2 + tg\, 2x$ (Колькі тут кораняў, па модулі меншых за 7?);

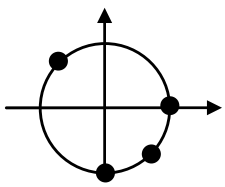
80) $\sqrt{5\sin(900^\circ - x) + \cos 2x} - 2\sin(990^\circ + x) = 0$;

81) $tg\, (x - \frac{\pi}{4}) = 1 - sin\, 2x$;

82) $tg\, (x + \frac{\pi}{4}) = 1 - sin\, 2x$;

Адказы да раўнанняў 41-80

41) $\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$ ($k \in Z$); $\frac{25\pi}{12}$. **42**) $\frac{\pi k}{9}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $k, n \in Z$. **43**) $40^{o} \pm 60^{o}$ + $360^{o}c$; $c \in Z$. **44**) $\pi n \pm \frac{\pi}{6}$; $n \in Z$. **45**) $\pi n - \frac{\pi}{4}$; $arctg(1\pm\sqrt{2}\,) + \pi k$; $n, k \in Z$; $arctg(1-\sqrt{2}\,) + 2\pi$. **46**) –1,5. **47**) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$; $n \in Z$. **48**) $\pi n \pm \frac{\pi}{6}$; $n \in Z$. **49**) $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; $\frac{5\pi}{3}$. **50**) Мноства кораняў пустое. **51**) $\frac{\pi}{6}$ (пачынайце з паніжэння ступені сінуса). **52**) 4. **53**) -30^{o}. **54**) $\frac{\pi}{12}+\pi n$; $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$; $n, k \in Z$. **55**) $-6arctg\sqrt{2} + 6k\pi$; $k \in Z$. **56**) 1980^{o}. **57**) -1905^{o}. **58**) $\frac{\pi}{24}\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$; $k \in Z$. **59**) $\frac{\pi k}{8}$; $k \in Z$. **60**) 65^{o}. **61**) Ні воднага. Вось так!
62) $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $k, n \in Z$. **63**) πk; $2\pi n \pm 123$; $k, n \in Z$.
64) $x \in R$. **65**) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; $k, n \in Z$. **66**) $\frac{\pi k}{2}\pm\frac{\pi}{12}$; $k \in Z$. **67**) 45^{o} + $180^{o}n$; $n \in Z$. **68**) $1^{o} + 3^{o}k$; $k \in Z$. **69**) $360^{o}k - 60^{o}$; $k \in Z$. **70**) $\frac{2\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{9}$; $k \neq 7m$, $n \neq 9c + 4$, $c, k, m, n \in Z$. **71**) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $k \in Z$. **72**) $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$; $k \in Z$. **73**) $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{12}$; $k, n \in Z$. **74**) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $k \in Z$. **75**) πk; $k \in Z$.
76) $\frac{\pi k}{2}\pm\frac{\pi}{6}$; $k \in Z$. **77**) πk; $\pi n \pm \frac{\pi}{3}$; $\pi m \pm\frac{1}{2}arccos\frac{1}{3}$; $k, m, n \in Z$.

78) Адказ – на малюнку:  **79**) 4. **80**) $150^{o}+360^{o}k$; $k \in Z$.
81) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{2} + \pi m$; $k, m \in Z$. **82**) πm; $m \in Z$.